Université de Bordeaux,
L1 de Mathématiques,
Année 2022-2023

Analyse S2 — Feuille 4

Exercice 1 En revenant à la définition, démontrer :

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1}{x}\right)=2.$$

Exercice 2 Étudier la continuité de la fonction $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x)=\begin{cases} 2x - x\ln(|x|) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$

Exercice 3 (La fonction de Dirichlet) Montrer que la fonction indicatrice $\chi_{\mathbb{Q}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x)=\begin{cases} 1 \text{ si } x\in\mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 4* On modifie la question précédente: Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \text{ est irrationnel} \\ \frac{1}{q} & \text{si} \quad x=\frac{p}{q} \text{ est rationnel et } \ p\wedge q=1 \end{cases}$$

a) Dessiner $f(\frac{j}{k})$ pour $1\leq j\leq k$ et $k\leq 6$.
b) Montrer que f est discontinue en tout point irrationnel
c) Montrer que f est continue en tout point rationnel !

Exercice 5 Soit f,g deux fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$, et supposons que $f(x)=g(x)$ pour tout $x\in\mathbb{Q}$. Montrer que f,g coïncident sur $\mathbb{R}$ tout entier. Revoir la fonction de Dirichlet de cette façon.

Exercice 6 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telle que

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ \forall\, y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)+f(y).$$

a) Montrer que $f(0)=0$.
b) Montrer que que pour tout $p\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, $f(px)=pf(x)$.
c) Pour $p\in\mathbb{N}^*$ et pour $r\in\mathbb{Q}$, calculer $f(p)$, $f(1/p)$, $f(r)$ en fonction de $f(1)$.

d) On suppose de plus que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe alors $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = ax.$$

e) En utilisant ce qui précède, déterminer toutes les fonctions $g\ :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, continues sur $]0,+\infty[$ et telles que

$$\forall x \in]0,+\infty[, \ \forall y \in]0,+\infty[, \ g(xy) = g(x) + g(y)$$

(on pourra considérer pour ce faire la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = g(e^x)$).

Exercice 7 Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(2x) = f(x).$$

Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.
Indication : on pourra commencer par montrer que pour tout entier n, et tout réel x, $f(x) = f(\frac{x}{2^n})$.

Exercice 8 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \inf \big\{ |x - t| \ , \ t \in [0,1] \big\}.$$

a) Montrer que f est bien définie en tout point de $\mathbb{R}$.
b) Montrer que
  a)
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ f(x) \le |x - t| \le |x - y| + |y - t|.$$
  b)
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ f(x) \le |x - y| + f(y).$$
  c)
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in \mathbb{R}, \ |f(x) - f(y)| \le |x - y|.$$
d) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.
e) Représenter pour $t \in [0,1]$ les fonctions $t \mapsto x - t$ et $t \mapsto |x - t|$ pour $x = -1$, $x = \frac{3}{4}$ et $x = 2$. En déduire graphiquement les valeurs de $f(-1)$, $f(\frac{3}{4})$ et $f(2)$.
f) Déterminer l'expression de f sur chacun des intervalles : $]-\infty, 0]$, $]0,1]$, $]1,+\infty[$.

Exercice 9

a) Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I, et soit $x_0 \in I$. On suppose que f est continue en x_0 et que $f(x_0)$ est strictement positif. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que
$$\forall x \in I \cap J, \quad f(x) > 0.$$
b) En déduire que si g et h sont deux fonctions réelles sur I, continues en x_0, telles que $g(x_0) \neq h(x_0)$, alors il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$\forall x \in V, \quad g(x) \neq h(x).$$

Exercice 10 Donner l'allure du graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ? (justifier la réponse)

Exercice 11

a) Soit $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. En utilisant la définition, démontrer la continuité de la fonction f sur le segment $I_a = [0, a]$, $a > 0$. *Indication* : étudier la continuité de f au voisinage de chaque point x_0 de I_a (considérer les deux cas $x_0 = 0$ et $x_0 > 0$).

b) La fonction f est-elle uniformément continue sur le segment I_a ? Énoncer le résultat du cours correspondant.

c) La fonction f est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$?

d) Donner un exemple d'une fonction g, continue sur $\mathbb{R}_+$, uniformément continue sur tout segment I_a, $a > 0$, mais qui ne soit pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

Exercice 12

a) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Montrer que si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors il existe au moins un point $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

b) Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair ; le polynôme P admet-il au moins une racine réelle ?

Exercice 13 Soient p et q deux réels strictement positifs et f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de montrer de deux façons "différentes" qu'il existe au moins un point $c \in [a, b]$ tel que

$$p\, f(a) + q\, f(b) = (p + q)\, f(c).$$

a) En considérant la fonction réelle g définie sur $[a, b]$ par

$$\forall\, x \in [a, b],\ g(x) = p\, f(a) + q\, f(b) - (p + q)\, f(x),$$

montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$.

b) Sans perte de généralité on peut supposer que $f(a) \leq f(b)$ (sinon remplacer f par $-f$). Justifier que $\frac{p}{p+q} f(a) + \frac{q}{p+q} f(b) \in [f(a), f(b)]$ puis conclure.

c) Pour la culture : démontrer que

$$[a, b] = \{(1 - t)a + tb\ ,\ t \in [0, 1]\} = \left\{ \frac{p}{p+q} a + \frac{q}{p+q} b\ ,\ (p, q) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \text{ et } p + q \neq 0 \right\}.$$

Exercice 14 Soit $f\ : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul fixé. On va montrer qu'il existe au moins un point $x_p \in [0, 1 - \frac{1}{p}]$ tel que

$$f\left(x_p + \frac{1}{p}\right) = f(x_p).$$

a) Traiter le cas $p = 1$.
b) Pour $p \geq 2$, on pose $g : x \in [0, 1 - \frac{1}{p}] \mapsto f\big(x + \frac{1}{p}\big) - f(x)$.
   a) Pour $p = 2$ calculer $g(0)$ et $g(\frac{1}{2})$ puis conclure.
   b) Pour $p \geq 3$, le calcul de $g(0)$ et $g(1 - \frac{1}{p})$ permet-il de conclure comme précédemment ?
   c) Pour $p \geq 3$, calculer $\sum_{k=0}^{p-1} g(\frac{k}{p})$ puis en déduire qu'il existe k_1 tel que $g(\frac{k_1}{p}) \geq 0$ et k_2 tel que $g(\frac{k_2}{p}) \leq 0$. Conclure.

Exercice 15 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Les quatre assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- (i) : l'image par f d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est encore un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$;
- (ii) : l'image par f d'un segment de $\mathbb{R}$ est encore un segment de $\mathbb{R}$;
  (On appelle segment un intervalle fermé et borné.)
- (iii) : l'image par f d'un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$ est encore un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$;
- (iv) : l'image réciproque par f d'un intervalle de $\mathbb{R}$ est encore un intervalle de $\mathbb{R}$.

Justifier les réponses.

Exercice 16 Le but de cet exercice est de montrer qu'une fonction $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, continue sur $[0, +\infty[$ et tendant vers 0 lorsque x tend vers l'infini, est toujours bornée sur son intervalle de définition $[0, +\infty[$ et atteint toujours sa borne supérieure $\sup_{[0,+\infty[} f$.
a) Faire un dessin.
b) Si f est la fonction nulle, le résultat est évident. On suppose f non identiquement nulle, en déduire qu'il existe $a \geq 0$ tel que $f(a) > 0$.
c) Justifier qu'il existe $A > 0$ avec $A \geq a$ tel que, pour tout $x > A$, $f(x) < f(a)$.
d) En déduire que f est bornée et que $\sup_{[0,+\infty[} f = \sup_{[0,A]} f$ puis conclure.
e) Atteint-elle par contre toujours sa borne inférieure sur $[0, +\infty[$? Si ce n'est pas le cas, exhiber un contre-exemple.

Exercice 17 Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et périodique (c'est-à-dire telle qu'il existe $T > 0$ avec $f(x + T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), est bornée sur $\mathbb{R}$ et atteint ses bornes. Indication : on pourra commencer par considérer la restriction de f à l'intervalle $[0, T]$.

Exercice 18 On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x \text{ si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

a) Montrer que $g([0, 1]) \subset [0, 1]$.
b) Montrer que $g : [0, 1] \to [0, 1]$ est une application bijective.
c) Montrer que g n'est pas monotone sur $[0, 1]$ et que g n'est pas non plus continue sur $[0, 1]$. Remarque : on a beaucoup plus, g n'est monotone sur aucun intervalle non vide et non réduit à un point inclus dans $[0, 1]$ et n'est continue qu'en $\frac{1}{2}$.

d) Trouver à l'aide de fonctions affines par morceaux un autre exemple de fonction bijective de $[0,1]$ sur $[0,1]$ et qui ne soit ni monotone, ni continue sur $[0,1]$.

Exercice 19 Le but de cet exercice est de démontrer qu'une fonction f continue et injective sur un intervalle I est nécéssairement strictement monotone sur cet intervalle. On suppose donc f continue et injective sur I.

a) Soient $a < b$ deux éléments de I, justifier que l'on a $f(a) < f(b)$ ou $f(a) > f(b)$.

b) On suppose que $f(a) < f(b)$ et on va montrer que f est strictement croissante sur $[a,b]$.
   a) Soit $x \in]a,b[$ et supposons que $f(x) \leq f(a)$. Montrer, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires sur $[x,b]$ qu'il existe $d \in [x,b]$ tel que $f(d) = f(a)$ puis en déduire une contradiction.
   b) Soit $x \in]a,b[$, montrer de même que l'on ne peut pas avoir $f(x) \geq f(b)$.
   c) Soient x et x' tels que $a < x < x' < b$, on sait déjà que $f(x)$ et $f(x')$ appartiennent à $]f(a), f(b)[$. Montrer que l'on ne peut pas avoir $f(x') \leq f(x)$.

d) Conclure sur la monotonie de f sur tout intervalle $[a,b]$ inclus dans l'intervalle I. Pour quel type d'intervalle I le travail est-il terminé ?

e) I est un intervalle quelconque.
   a) Montrer que l'on ne peut pas avoir deux intervalles $[a,b]$ et $[c,d]$ inclus dans I tels que f soit strictement croissante sur l'un et strictement décroissante sur l'autre.
   b) Traduire avec des quantificateurs la proposition "f est strictement croissante sur I ou f est strictement décroissante sur I" puis en donner la négation.
   c) Conclure sur la stricte monotonie de f sur I.

d) Donner un exemple de fonction continue, injective et non strictement monotone sur une union de deux intervalles.

Exercice 20

a) Quel est le domaine de définition maximal de la fonction
$$x \mapsto (\ln(x+1))^2 \ ?$$

b) La fonction f est-elle monotone sur ce domaine de définition maximal ?

c) Montrer que le domaine de définition maximal de f contient $[0,+\infty[$ et déterminer $f([0,+\infty[)$. On note $h := f_{|[0,+\infty[}$ la restriction de f à $[0,+\infty[$. h réalise-t-elle une bijection entre $[0,+\infty[$ et $f([0,+\infty[)$? Si oui, déterminer l'application réciproque h^{-1}.

d) Montrer que le domaine de définition maximal de f contient aussi $]-1,0]$ et déterminer $f(]-1,0])$. On note $g := f_{|]-1,0]}$ la restriction de f à $]-1,0]$. g réalise-t-elle une bijection entre $]-1,0]$ et $f(]-1,0])$? Si oui, déterminer l'application réciproque g^{-1}.

Exercice 21

a) Existe-t-il une bijection continue entre $[0,1[$ et $\mathbb{R}$? *Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice* **??**.

b) Soit la fonction $f\ : [-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall\, x \geq -1,\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$$
Déterminer $f([-1,+\infty[)$. Montre que f réalise une bijection entre $[-1,+\infty[$ et $f([-1,+\infty[)$ et expliciter ensuite la fonction réciproque $f^{-1}\ :\ f([-1,+\infty[) \to [-1,+\infty[$.

c) Trouver le plus grand intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant 0 sur lequel la fonction

$$g_I \ : x \in I \mapsto \tan(x^3)$$

soit injective et réalise donc une bijection entre I et $g(I)$. Donner alors le domaine de définition de la fonction réciproque g_I^{-1} et l'ensemble d'arrivée.

Exercice 22 Montrer que

$$\forall\, t \in]-1,+\infty[\backslash\{0\},\ \frac{t}{1+t} < \ln(1+t) < t.$$

En déduire que les fonctions

$$x \in]-\infty,-1[\mapsto f(x) = \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x, \quad x \in]0,+\infty[\mapsto g(x) = \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{x+1}$$

sont strictement monotones sur leurs domaines de définition respectifs.

Exercice 23 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. Montrer que si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Exercice 24 Prolonger par continuité en 0, puis étudier la dérivabilité en ce même point, des fonctions suivantes :

$$f_1 \ : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^2 \cos(1/x), \quad f_2 \ : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \sin(x)\,\sin(1/x).$$