Université de Bordeaux,
L1 de Mathématiques,
Année 2022-2023

Analyse S2 — Feuille 5

Exercice 1 Soit $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que f est continue.

Exercice 2 Considérer $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, donné par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

Est-ce que f est continue? dérivable? de classe C^1?

Exercice 3 Soit $f \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
b) Montrer que f est dérivable en 0.
c) La fonction f' est-elle continue en 0 ?

Exercice 4 Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :
a) $f(x) = |x|$,
b) $g(x) = x|x|$,
c) $h(x) = |x(x-2)|$.
d) $k(x) = |x|^p$ pour $p > 1$.

Exercice 5 Montrer par récurrence les règles

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}.g^{(n-k)} \qquad \text{Leibniz}$$

et

$$\left(\prod_{k=1}^{n} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_k' \left(\prod_{j=1, j\neq k}^{n} f_j\right).$$

Exercice 6 Pour chaque fonction, déterminer le domaine maximale de définition, puis dériver.

$f_1(x) := \ln(1-x^2)$ $\quad f_2(x) := x\cos(\ln(x))$ $\quad f_3(x) := (x+3)^{27}x^4$
$f_4(x) := \ln(x^2+1)$ $\quad f_5(x) := \arctan(x^3+2x^2-1)$ $\quad f_6(x) := \exp(\tan(x))(sin(x))^3$
$f_7(x) := \cos(\sin(x)\exp(x^2))$ $\quad f_8(x) := \frac{\sin(x)}{\pi+\cos(x)}$ $\quad f_9(x) := x^x$
$f_{10}(x) := x^{x^x}$ $\quad f_{11}(x) := \sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$ $\quad f_{12}(x) := \frac{1}{\arctan(\sqrt{1+x^2})}$

Exercice 7

a) Montrer que si f est dérivable en $a \in I$, avec I intervalle ouvert, alors on a $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a)$.

b) Graphiquement : représenter une droite qui a pour pente $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ et traduire le résultat précédent.

c) Le fait que $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ existe est-il équivalent à f dérivable en a ?

Exercice 8 Soitent $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $f(x) := xg(x)$.

a) Supposons g continue en $a = 0$. Montrer que f est dérivable en $a = 0$ et calculer $f'(a)$ (en fonction de g).

b) Est-ce qu'on peut étendre la raisonnement à des points $a \neq 0$? Preuve ou contre-exemple.

Soit maintenant $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $\varphi(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue en $a = 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \qquad \varphi(x) = xh(x)$$

Exercice 9

a) Donner une version explicite du théorème de Rolle sur les segments $[1, 2]$ puis $[2, 3]$ pour la fonction $f\ : x \in \mathbb{R} \mapsto (x-1)(x-2)(x-3)$.

b) Donner une version explicite du théorème des accroissements finis pour la fonction $f\ : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ sur le segment $[-1, 2]$.

Exercice 10 Soient $I = [a, b]$ un intervalle et $f\ :\ I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On note $M = \sup_I f'$. Montrer que si $f(b) - f(a) = M(b - a)$ alors f est une fonction affine sur I (on pourra utiliser la fonction h définie sur I par $h(x) = M(x - a) - (f(x) - f(a))$).

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(\frac{1}{n}) = 0$. Calculer $f(0)$ et $f'(0)$.

Exercice 12 Soient une fonction f continue sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. On suppose que f est dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et que f' admet des limites à gauche et à droite en x_0 qui sont égales et valent ℓ. En revenant à la défintion de la dérivabilité, montrer que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = \ell$.

Application: étudier la fonction

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Exercice 13 Soit $I = (a, b)$ un intervalle ouvert borné non vide de $\mathbb{R}$ et $f\ : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

a) Montrer que si f est non bornée sur I, alors f' est non bornée sur I. Indication : quelle est la contraposée?

b) La réciproque est fausse: Trouver une fonction bornée sur un intervalle (a, b), dérivable sur cet intervalle et dont la dérivée n'est pas bornée. Indication: rappeler la formule de la dérivée d'une composition.

Exercice 14

a) En étudiant la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, estimer inférieurement et supérieurement la différence $\sqrt{100.1} - 10$.

b) En étudiant la fonction $x \mapsto \exp(-x)$, estimer inférieurement et supérieurement la différence $1 - \exp(-0.024)$.

Exercice 15 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui satisfait

$$\forall x, y : \qquad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^2$$

Montrer que f est constante.

Exercice 16 Montrer que

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \arctan(x) \qquad \text{et} \qquad g : [1, \infty) \to \mathbb{R} \quad g(x) = \ln(x)$$

sont uniformément continues.

Exercice 17 Démontrer que pour tout $x \geq 0$

$$\ln(1 + x) \leq \frac{x}{\sqrt{1 + x}}$$

Indication: considérer $h(t) = \ln(1 + t) - \frac{t}{sqrt1+t}$ sur l'intervalle $[0, x]$.

Exercice 18

a) Démontrer que la fonction cos admet au moins un point fixe sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et que l'on peut même se restreindre à l'intervalle $[0, 1]$.

b) Montrer que

$$\forall (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \quad |\cos(x) - \cos(y)| \leq \sin(1)|x - y|.$$

c) En reprenant un résultat du cours, montrer que la suite (x_n) définie par

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \; x_{n+1} = \cos(x_n) \end{cases}$$

converge vers un unique point fixe $\ell \in [0, 1]$ de cos.

Exercice 19 Avec la règle de l'Hospital calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{x}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^3} - \frac{x}{x\sin(x)}\right), \qquad \lim_{x\to\pi} \left((x - \pi)\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2023}}{e^{\frac{x}{2023}}}.$$

Exercice 20 Calculer les développements limités en 0 à l'ordre n des fonctions définies comme suit au voisinage de 0 :

a) $f(x) = \cos(x^2) + \sin(x)$ avec $n = 6$.
b) $f(x) = \cos(2x)\sqrt{1+x}$ avec $n = 3$.
c) $f(x) = (1 + x + x^2)/(1 - x - x^2)$, avec $n = 3$.
d) $f(x) = (\cos(x^3))^{\frac{1}{3}}$, avec $n = 12$.
e) $f(x) = (1 + x)^{100}/\big((1 - 2x)^{40}(1 + 2x)^{60}\big)$, avec $n = 2$.
f) $f(x) = \ln(1 + x\sin(x))$, avec $n = 4$.
g) $f(x) = e^{\cos(x)}$, avec $n = 4$.
h) $f(x) = (1 + \sin(x))^{1/3}$, avec $n = 4$.
i) $f(x) = x/(e^x - 1)$, avec $n = 2$.
j) $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$, avec $n = 2$ (on aura posé $f(0) = e$).

Exercice 21 Etudier minimum et maximum de la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $[0, 2]$.

Exercice 22 Etudiez les extrema locaux (sur $\mathbb{R}$) de

$$f(x) = (2 - x)e^{-x^2} \qquad g(x) = -(x^2 + 3x - 3)e^{-x}$$

Exercice 23 Montrer que $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n e^{-x}$ admet un maximum global. Le déterminer.

Exercice 24 Soit f une fonction dérivable à valeurs strictement positives. Quelle est la dérivé de $\ln(f(x))$? S'en servir pour déterminer les extremas locaux de

$$f(x) = \frac{e^{x^2 - x - 1}}{x^4}$$