Université de Bordeaux 2015-2016

DS Analyse 1 08:30-10:00
Lundi 7 mars 2016

Exercice 1. (2 POINTS).
(1) Donner la définition d'une suite convergente.
(2) Donner la définition d'une suite de Cauchy.

Exercice 2. (4 POINTS). Calculer les limites des suites suivantes

$$u_n = \frac{\sqrt{n} - n + 1}{\sqrt{n} + n + 1}, \qquad v_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 3. (5 POINTS). Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres réels définie par

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{3}{2} & \text{si } n = 0, \\ \dfrac{3}{4} + \dfrac{(u_{n-1})^2}{4} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.
(3) Montrer que la suite est monotone. La suite converge-t-elle? Si oui, vers quelle limite?

Exercice 4. (5 POINTS). On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels définies pour tout $n \geq 1$ par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n^2}.$$

Monter que les deux suites sont adjacentes. Les suites convergent-elles vers une même limite?

Exercice 5 (5 POINTS). Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < 1$ et soit la suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$

$$u_n = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \frac{x^n}{n}.$$

(1) Montrer que pour $m \geq 1$

$$|u_{n+m} - u_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1 - |x|}.$$

On rappelle que lorsque $a \neq 1$, on a

$$1 + a + a^2 + a^N = \frac{1 - a^{N+1}}{1 - a}.$$

(2) Montrer que la suite (u_n) est une suite de Cauchy. La suite converge-t-elle?