	ANNEE UNIVERSITAIRE 2018/2019 SESSION DE PRINTEMPS CODE UE : 4TPM209 Analyse Devoir surveillé Date : 14/03/2019 Heure 11h00 Durée : 1h30 Documents : Non autorisés. La calculette homologuée par l'UB est le seul matériel électronique autorisé.	
université de BORDEAUX		Collège Sciences &Technologies

Les réponses doivent être justifiées et la qualité de la rédaction sera prise en compte.

Questions et démonstration de cours. [4.5 points]

(1) Donner la définition d'une suite bornée.

(2) Soit f une fonction définie sur $I =]a, b[$ et $x_0 \in I$. Donner la définition de f continue en x_0.

(3) Énoncer le théorème sur les suites adjacentes et en donner la démonstration.

Exercice 1. [2.5 points] Calculer les limites des suites dont le terme général est

(1) $u_n = \dfrac{(-2)^{n+1} - 7^{n+1}}{(-2)^n + 7^n}$, $n \geq 1$.

(2) $v_n = \dfrac{\sin(n)}{\sqrt{n} - \ln(n)}$, $n \geq 1$.

Exercice 2. [6 points] On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_0 \in [0,1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n(2-u_n).$$

(1) On définit sur $[0,1]$ la fonction f par $f(x) = \dfrac{3}{4}x(2-x)$. Etudier les variations de f et montrer que $f([0,1]) \subset [0,1]$.

(2) Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0,1]$.

(3) On prend $u_0 = \dfrac{1}{2}$, étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. Montrer qu'elle converge et déterminer sa limite.

(4) On prend $u_0 \in [\dfrac{2}{3}, 1]$, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 3. [3 points] Soit $A = \{x \in \mathbb{R} \ :\ \exists n \in \mathbb{N},\ x = \dfrac{n}{n+1}\}$.

(1) Justifier l'existence d'une borne supérieure et d'une borne inférieure de A.

(2) Déterminer $\sup A$, est-ce un maximum ?

(3) Déterminer $\inf A$, est-ce un minimum ?

Exercice 4. [5 points] Soit la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\forall n \geq 1, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \cos(k)}{2^k}$$

(1) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $p \geq 1$

$$|s_{n+p} - s_n| \leq \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right).$$

(2) Démontrer que la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy.

(3) La suite $(s_n)_{n\geq 1}$ converge t-elle dans $\mathbb{R}$?