UNIVERSITE DE BORDEAUX

Calcul différentiel

Examen

le 18 décembre 2014

Durée 3h. Aucun document autorisé.

Exercice 1. Soit $K = [-2,2] \times [0,2\pi]$. On considère la fonction $f : K \to \mathbf{R}$ définie par la formule

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} - \sqrt{4-x^2}\cos y.$$

1) On note U l'intérieur de K. Déterminer les extrema locaux de la fonction f dans U.

2) Déterminer le maximum et le minimum absolus de f sur K.

Exercice 2. Soit $c > 0$. On note K l'ensemble

$K = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R} \mid x_1, x_2, \dots, x_n \geqslant 0 \text{ et } x_1+x_2+\cdots+x_n = c\}$.

Soit $f : K \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$.

1) Soit

$U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R} \mid x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \text{ et } x_1+x_2+\cdots+x_n = c\}$.

Prouver que si $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ est un extremum local de f sur U, alors $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = c/n$.

2) Prouver que le point $(c/n, c/n, \dots, c/n)$ est l'unique maximum global de f sur K.

3) Prouver l'inégalité arithmético-géométrique: pour tous $x_1, x_2, \dots, x_n \geqslant 0$ on a

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Exercice 3. Soit $C([0,1], \mathbf{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ muni de la norme infinie $\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

1) Prouver que l'application $u : C([0,1], \mathbf{R}) \to C([0,1], \mathbf{R})$ définie par

$$u(f)(x) = \int_0^x f(t)t dt$$

est une application linéaire continue.

2) Soit $\Phi : C([0,1], \mathbf{R}) \to C([0,1], \mathbf{R})$ l'application définie par $\Phi(f) = f + u(f)f$. Montrer que Φ est une application différentiable et calculer $D(\Phi)_f$ en tout $f \in C([0,1], \mathbf{R})$.

3) Prouver que Φ est de classe C^1. En déduire que Φ est un C^1-difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $C([0,1], \mathbf{R})$ sur un voisinage de 0 dans $C([0,1], \mathbf{R})$.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = y(t)^4 + t^2 y(t)^2. \tag{1}$$

1) Trouver une solution $y_0(t)$ de cette équation vérifiant $y(0) = 0$.

2) Soient $(t_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Prouver qu'il existe une unique solution maximale $(\varphi(t), I)$ de l'équation (1) vérifiant $y(t_0) = y_0$.

3) On note $(\varphi(t),]a, b[)$ la solution maximale de (1) vérifiant $\varphi(t_0) = y_0$. Prouver que $\varphi(t)$ est strictement croissante sur $]a, b[$.

Dans les questions 4-7) on suppose que $y_0 < 0$.

4) Prouver que $\varphi(t) < 0$ pour tout $t \in]a, b[$ et que $b = +\infty$.

5) Prouver que $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$.

6) Prouver que $\dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^4} \geqslant 1$ pour tout $t \in]a, t_0[$. En déduire que

$$\frac{1}{3y(t)^3} - \frac{1}{3y_0^3} \geqslant t_0 - t$$

pour tout $t \in [a, t_0[$.

7) Prouver que $a \in \mathbf{R}$ et que $\lim_{t\to a^+} \varphi(t) = -\infty$.

8) Soit $y_0 > 0$. Prouver que $a = -\infty$, $b \in \mathbf{R}$ et que $\lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = 0$ et $\lim_{t\to b^-} \varphi(t) = +\infty$.

FIN