UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Calcul différentiel

Examen (corrigé)

le 15 décembre 2015

Durée 3h. Aucun document autorisé.

Exercice 1. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ le disque de rayon 1. On considère la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

1) On note U l'intérieur de D. Trouver les points critiques de f sur U.

Solution. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y(1 - 2x^2 - y^2)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x(1 - 2y^2 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{xy(2x^2 + 3y^2 - 3)}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{xy(2y^2 + 3x^2 - 3)}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{y^2(1 - 2x^2 - y^2)}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}} + \frac{1 - 3y^2 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

Pour trouver les points critiques sur U on résout le système

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Si $x = 0$, alors soit $y = 0$ soit $y = \pm 1$. Si $y = 0$, alors soit $x = 0$ soit $x = \pm 1$. Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$ on a le système

$$\begin{cases} 1 - 2x^2 - y^2 = 0 \\ 1 - 2y^2 - x^2 = 0. \end{cases}$$

On en déduit que $x^2 = y^2$ d'où $3x^2 = 1$ et $3y^2 = 1$. Les solutions sont $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$. Comme les points $(0, \pm 1)$ et $(\pm 1, 0)$ n'appartiennent pas à U, les points critiques de $f(x, y)$ sur U sont $(0, 0)$ et $(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}})$.

2) Déterminer les extrema locaux de f sur U.

Solution. En $(0,0)$ la matrice hessienne de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $(0,0)$ n'est pas un extremum de f. En $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ et en $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ la matrice hessienne de f est

$$\begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Comme le discriminant $(-\frac{2}{\sqrt{3}})^2 - (-\frac{4}{\sqrt{3}})(-\frac{4}{\sqrt{3}}) = -4 < 0$ et $-\frac{4}{\sqrt{3}} < 0$, la fonction f a des maxima locaux en $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ et en $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$.

En $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ et en $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ la matrice hessienne de f est

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Comme le discriminant $(-\frac{2}{\sqrt{3}})^2 - (\frac{4}{\sqrt{3}})(\frac{4}{\sqrt{3}}) = -4 < 0$ et $\frac{4}{\sqrt{3}} > 0$, la fonction f a des minima locaux en $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ et en $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$. Remarquons que

$$f(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{3\sqrt{3}},$$

$$f(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = f(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{3\sqrt{3}}.$$

3) Déterminer le maximum et le minimum absolus de f sur D.

Solution. Comme D est compact, f atteint ses bornes sur D. Soit B la frontière de D. Alors $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. On voit que $f(x,y) = 0$ si $(x,y) \in B$. En comparant avec la question 2) on voit que le maximum absolu de f sur D est $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ et que le minimum absolu de f sur D est $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Exercice 2. Soient $a, b, c > 0$. On considère l'ellipsoïde
$$X = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$
Soit $f : X \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x,y,z) = xyz.$$
1) Prouver que f atteint son maximum et son minimum sur X.

Solution. On voit que si $(x,y,z) \in X$, alors $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ et $|z| \leqslant c$. Donc X est borné. Soit $g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$. Alors $X = g^{-1}(\{1\})$. Comme g est continue et $\{1\}$ est fermé on en déduit que X est fermé dans $\mathbb{R}^3$. Donc X est un compact. Alors f est une fonction continue définie sur un compact et par le théorème de Weierstrass f atteint son maximum et son minimum sur X.

2) Trouver les extrema relatifs de f sur X.

Solution. On a
$$grad(g) = \left(2x/a^2, 2y/b^2, 2z/c^2\right), \qquad grad(f) = (yz, xz, xy).$$
On note λ le multiplicateur de Lagrange. Donc on a le système suivant:
$$yz = \lambda \cdot 2x/a^2, \quad xz = \lambda \cdot 2y/b^2, \quad xy = \lambda \cdot 2z/c^2.$$
Si $\lambda = 0$, au moins une des inconnues est nulle et donc $f(x,y,z) = xyz = 0$. On en déduit facilement qu'il ne s'agit pas d'un extremum relatif. Supposons que $\lambda \neq 0$. En multipliant les équations du système par x, y et z respectivement on obtient que
$$\frac{xyz}{2\lambda} = \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$
Comme $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, on trouve que
$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{1}{3},$$
d'où
$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \pm\frac{b}{\sqrt{3}}, \quad z = \pm\frac{c}{\sqrt{3}}.$$
On voit que $f(x,y,z) = \dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$ ou $f(x,y,z) = -\dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$ selon les signes respectifs de x, y et z. En utilisant la question précédente on en déduit que $-\dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$ est le minimum de f sur X et que $\dfrac{abc}{3\sqrt{3}}$ est le maximum de

f sur X.

3) Quel est le plus grand volume d'un parallélépipède rectangle qu'on peut inscrire dans X?

Solution. Le volume d'un parallélépipède rectangle inscrit dans X est

$$(2x) \cdot (2y) \cdot (2z) = 8 \cdot xyz, \qquad \text{où} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Donc le plus grand volume d'un parallélépipède rectangle qu'on peut inscrire dans X est égal à

$$\frac{8abc}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x, xy, xyz)$.

1) Déterminer l'ensemble U des points au voisinage desquels f est un C^1-difféomorphisme local

Solution. On calcule la matrice jacobienne $Jac(f)_{(x,y,z)}$de $f(x, y, z)$. On a

$$Jac(f)_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

Alors $\det\left(Jac(f)_{(x,y,z)}\right) = x^2y$ et par le théorème d'inversion locale

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0 \quad \text{et} \quad y \neq 0\}.$$

2) Prouver que f induit un difféomorphisme global de U sur $f(U)$.

Solution. Il suffit de prouver que f est injectif sur U. Si $f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2)$, alors $x_1 = x_2$, $x_1y_1 = x_2y_2$ et $x_1y_1z_1 = x_2y_2z_2$. Comme $x_1, y_1, x_2, y_2 \neq 0$, on en déduit facilement que $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ et $x_3 = z_3$.

3) Déterminer $f(U)$.

Solution. On voit que si $(x, y, z) \in U$, alors $f(x, y, z) = (x, xy, xyz) \in U$. Donc $f(U) \subset U$. Réciproquement, supposons que $(a, b, c) \in U$.

L'équation $f(x, y, z) = (a, b, c)$ s'écrit $(x, xy, xyz) = (a, b, c)$. Comme $a, b \neq 0$, on voit qu'elle a l'unique solution $x = a$, $y = b/a$, $z = c/b$. Donc $f(U) = U$.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = e^{y(t)} - 1. \qquad (*)$$

1) Soit $y_0 \in \mathbb{R}$.
 a) Prouver qu'il existe une unique solution maximale $(y(t),]a, b[)$ de l'équation (*) vérifiant $y(0) = y_0$.

Solution. La fonction $f(t, y) = e^y - 1$ est continument différentiable par rapport à y et par le théorème de Cauchy-Lipschitz il existe une unique solution maximale $(y(t),]a, b[)$ de l'équation (*) vérifiant $y(0) = y_0$.

b) Donner l'unique solution de l'équation (*) pour $y_0 = 0$?

Solution. $y(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2) Supposons que $y_0 > 0$.
 a) Montrer que $y(t) > 0$ pour tout $t \in]a, b[$.

Solution. Supposons qu'il existe $t_1 \in]a, b[$ tel que $y(t_1) \leqslant 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $t_2 \in]a, b[$ tel que $y(t_2) = 0$. Donc $y(t)$ et la fonction nulle sont deux solutions du problème de Cauchy avec la condition initiale $y(t_2) = 0$. On en déduit, en utilisant l'unicité de solution, que $y(t)$ est la fonction nulle. Or $y(0) = y_0 > 0$. Contradiction.

b) Montrer que $y(t)$ est croissante. En déduire que

$$y'(t)e^{-y(t)} \geqslant 1 - e^{-y_0}$$

pour tout $t \in [0, b[$.

Solution. Comme $y(t) > 0$, on a $y'(t) = e^{y(t)} - 1 > 0$ pour tout $t \in]a, b[$. Donc $y(t)$ est croissante. En particulier, pour tout $t \in [0, b[$ on a

$$y'(t)e^{-y(t)} = 1 - e^{-y(t)} \geqslant 1 - e^{-y_0}.$$

c) Montrer que $a = -\infty$ et $b < +\infty$.

Solution. Supposons que $a \in \mathbb{R}$. Comme $y(t)$ est croissante et $y(t) > 0$ pour tout $t \in]a, b[$, la limite $A = \lim_{t \to a^+} y(t)$ est bien définie. Alors par le théorème des bouts (a, A) appartient à la frontière de $\mathbb{R}^2$, d'où $A = \pm\infty$. Cette contradiction montre que $a = -\infty$.

En utilisant la question 2b), pour tout $t \in]0, b[$ on a

$$\int_0^t y'(s)e^{-y(s)}ds \geqslant \int_0^t (1 - e^{y_0})ds = (1 - e^{-y_0})(t - t_0).$$

Or

$$\int_0^t y'(s)e^{-y(s)}ds = -e^{-y(s)}\Big|_{t=0}^{s=t} = e^{-y_0} - e^{-y(t)}.$$

Donc

$$e^{-y_0} > e^{-y_0} - e^{-y(t)} = (1 - e^{-y_0})(t - t_0).$$

Supposons que $b = +\infty$. Alors $(1-e^{-y_0})(t-t_0) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$. Or

$$(1 - e^{-y_0})(t - t_0) < e^{-y_0}.$$

Cette contradiction montre que $b = +\infty$.

3) Supposons que $y_0 < 0$.

a) Montrer que $y(t) < 0$ pour tout $t \in]a, b[$.

Solution. Reprendre l'argument de la question 2).

b) Montrer que $y(t)$ est décroissante et que

$$y_0 - t \leqslant y(t) \leqslant y_0, \qquad t \in]0, b[.$$

Solution. Comme $y(t) < 0$, on a $y'(t) = e^{y(t)} - 1 < 0$. Donc $y(t)$ est décroissante. En particulier, pour tout $t \in]0, b[$ on a $y(t) \leqslant y_0$. D'autre part, comme $y'(t) \geqslant -1$ on a

$$y(t) = y_0 + \int_0^t y'(s)ds \geqslant y_0 + \int_0^t (-1)ds = y_0 - t$$

pour tout $t \in [0, b[$.

c) Montrer que $a = -\infty$.

Solution. Supposons que $b < +\infty$. Comme $y(t)$ est décroissante, le théorème des bouts implique que $y(t) \to -\infty$ quand $x \to b^-$. Or $y(t) \geqslant y_0 - t \geqslant y_0 - b$ pour tout $t \in]0, b[$.

d) Montrer que $b = +\infty$.

Solution. Supposons que $a \neq -\infty$. Comme $y(t)$ est décroissante et $y(t) < 0$ pour tout $t \in]a, b[$, la limite $B = \lim_{t\to a^+} y(t)$ existe et $B \leqslant 0$. Par le théorème des bouts (a, B) appartient à la frontière de $\mathbb{R}^2$. Cette contradiction montre que $a = -\infty$.

FIN