UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Équations différentielles et calcul différentiel

Corrigé du Devoir surveillé du 3 novembre 2016

Durée 1h30. Aucun document autorisé.

TOUTES LES REPONSES DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES.

Première partie.
1) Donner la définition de l'exponentielle de matrice.

Réponse. L'exponentielle d'une matrice carré $A \in M_n(\mathbf{R})$ est défine par la série convergente $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A.

Solution. On a

$$\det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -2 \\ 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 5.$$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = -2 - i$ et $\lambda_2 = -2 + i$. Si $\binom{x}{y}$ est un vecteur propre qui correspond à λ_1, alors $(1-i)x - 2y = 0$. On en déduit que le sous espace propre associé à λ_1 est engendré par $\binom{1+i}{1}$:

$$V_{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

De même, Si $\binom{x}{y}$ est un vecteur propre qui correspond à λ_2, alors $(1+i)x - 2y = 0$. On en déduit que le sous espace propre associé à λ_1 est engendré par $\binom{1-i}{1}$:

$$V_{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

3) Calculer e^{At} et e^{-At}, où t est une variable.

Solution. On a

$$A\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} = (-2-i)\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En comparant les parties réelles et imaginaires on obtient que
$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$
On peut réecrire ces deux égalités sous la forme :
$$A\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}.$$
On pose $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$. Alors $P^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$ et
$$A = P\begin{pmatrix}-2 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}P^{-1}, \qquad e^{At} = P\exp\left(\begin{pmatrix}-2 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}t\right)P^{-1}$$
On a
$$\exp\left(\begin{pmatrix}-2 & -1\\1 & -2\end{pmatrix}t\right) = \exp\left(\begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & -2\end{pmatrix}t\right)\exp\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}t\right) =$$
$$= e^{-2t}\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}.$$
Donc
$$e^{At} = e^{-2t}\begin{pmatrix}\cos t - \sin t & 2\sin t\\ -\sin t & \cos t + \sin t\end{pmatrix}.$$
En calculant la matrice inverse de e^{At} (on peut utiliser la formule $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\-c & a\end{pmatrix}$) on trouve que
$$e^{-At} = e^{2t}\begin{pmatrix}\cos t + \sin t & -2\sin t\\ \sin t & \cos t - \sin t\end{pmatrix}.$$

Deuxième partie.

4) Soient A une matrice carrée de taille n à coefficients réels et $B(t) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ une fonction continue. Donner, sans démonstration, la solution générale de l'équation différentielle $X'(t) = AX(t) + B(t)$.

Réponse. La solution générale s'écrit :
$$\varphi(t) = e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}B(\tau)d\tau + e^{At}C,$$
où t_0 est un réel fixé quelconque et $C = \binom{C_1}{C_2}$, $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

On considère le système d'équations différentielles suivant
$$(*) \qquad \begin{cases} x'(t) = -3x(t) + 2y(t),\\ y'(t) = -x(t) - y(t).\end{cases}$$

5) Expliciter la solution générale du système (*).

Solution. On a

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbf{R},$$

d'où

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-2t}(C_1(\cos t - \sin t) + 2C_2 \sin t), \\ y(t) &= e^{-2t}(-C_1 \sin t + C_2(\cos t + \sin t)), \end{aligned}$$

où $C_1, C_2 \in \mathbf{R}$.

6) On appelle solution stationnaire toute solution qui est constante en fonction de t. Donner les solutions stationnaires du système (*).

Solution. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont constantes, alors $x'(t) = y'(t) = 0$ et on a le système suivant :

$$\begin{cases} -3x(t) + 2y(t) = 0 \\ -x(t) - y(t) = 0. \end{cases}$$

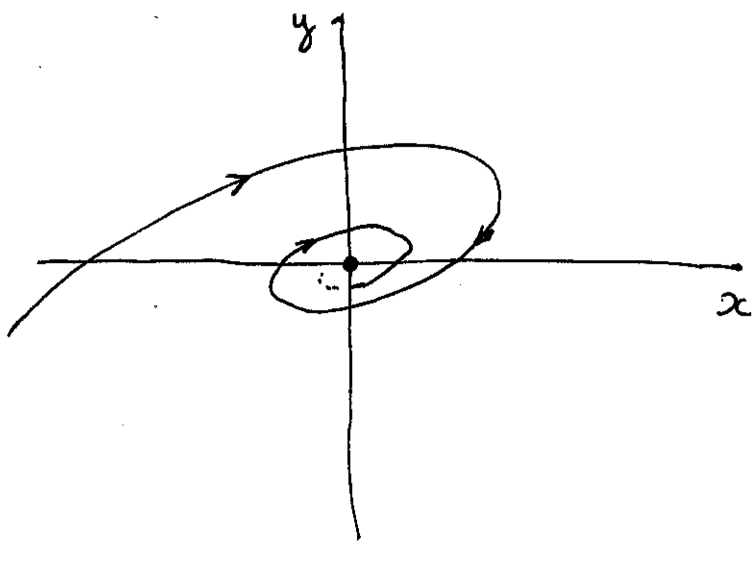
On en déduit que $x(t) = y(t) = 0 \ \forall t \in \mathbf{R}$.

7) Donner la définition du portrait de phase d'une équation différentielle autonome.

Réponse. Le portrait de phase d'une équation différentielle autonome est le dessin de l'ensemble des trajectoires des solutions du système.

8) Donner le portrait de phase du système (*). Préciser le comportement des solutions quand $t \to +\infty$ et $t \to -\infty$.

Solution. Comme les valeurs propres $\lambda_{1,2}$ sont des nombres complexes de parties réelles strictement négatives, il s'agit d'un foyer stable. Pour détérminer le sens de rotation des trajectoires on peut remarquer que si $y(t) = 0$, alors $\binom{x'(t)}{y'(t)} = x(t)\binom{-3}{-1}$. Donc la rotation est dans le sens des aiguilles d'une montre.



Troisième partie.

9) Trouver une solution particulière du système

$$(**)\qquad \begin{cases} x'(t) = -3x(t) + 2y(t), \\ y'(t) = -x(t) - y(t) + e^{-2t} \end{cases}$$

en utilisant la formule générale de la question 4).

Solution. On a

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2\tau} \end{pmatrix} d\tau.$$

En utilisant le calcul de $e^{-A\tau}$ (question 3)) on a

$$e^{-A\tau} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin\tau \\ \cos\tau - \sin\tau \end{pmatrix}$$

Donc

$$\int_0^t e^{-A\tau} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2\tau} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} 2\cos t - 2 \\ \cos t + \sin t - 1 \end{pmatrix}.$$

Un petit calcul montre que

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} 2\cos t - 2 \\ \cos t + \sin t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} + e^{At} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Comme $e^{At}\binom{-2}{-1}$ est une solution de l'équation homogène (*), on trouve que $\varphi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$ est une solution particulière de (**).

10) Donner la solution maximale du problème de Cauchy $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour l'équation (**).

Solution. La solution générale de (*) sécrit :

$$x(t) = 2e^{-2t} + e^{-2t}(C_1(\cos t - \sin t) + 2C_2 \sin t),$$
$$y(t) = e^{-2t} + e^{-2t}(-C_1 \sin t + C_2(\cos t + \sin t)).$$

En posant $t = 0$ on trouve que $C_1 = -1$ et $C_2 = 0$. Donc $x(t) = e^{-2t}(\sin t - \cos t + 2)$ et $y(t) = e^{-2t}(\sin t + 1)$.

FIN