UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Calcul différentiel

Examen

le 8 décembre 2016

Durée 3h. Aucun document autorisé.

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

2) Trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale et calculer les matrices e^{At} et e^{-At}.

3) Donner une base de l'espace vectoriel des solutions (*i.e.* un système fondamental de solutions) du système homogène

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 3y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t). \end{cases}$$

4) Donner la solution générale du système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 3y(t) + e^t \\ y'(t) = -2x(t) + 4y(t). \end{cases}$$

Exercice 2. On note $M_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbf{R}$. On fixe une norme $\|\cdot\|$ sur $M_n(\mathbf{R})$ et une matrice $A \in M_n(\mathbf{R})$ et on considère l'application $f : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})$ donnée par $f(X) = XAX$.

1) Montrer que f est différentiable en tout point $X \in M_n(\mathbf{R})$ et calculer $D(f)_X$ (donner la formule explicite pour $D(f)_X(H)$, $H \in M_n(\mathbf{R})$).

2) Montrer que $\|D(f)_X\| \leqslant 2\|A\| \cdot \|X\|$. En déduire que f est une application continûment différentiable.

3) Énoncer le théorème d'inversion locale.

4) Supposons que A est inversible. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute matrice $B \in M_n(\mathbf{R})$ vérifiant $\|B - A^{-1}\| < \varepsilon$ l'équation $XAX = B$ admet une solution dans $M_n(\mathbf{R})$.

Exercice 3. 1) Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz.

On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = t^2 x(t)^2 - t^2. \qquad (*)$$

2) Montrer que pour tout x_0 il existe une unique solution maximale de l'équation (*) vérifiant $x(0) = x_0$.

3) Trouver les solutions maximales des problèmes de Cauchy $x(0) = -1$ et $x(0) = 1$.

4) Énoncer le théorème des bouts.

Pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$ on note $(x(t),]a, b[)$ la solution maximale du problème de Cauchy $x(0) = x_0$.

Dans la question 5) on suppose que $x_0 \in]-1, 1[$.

5a) Montrer que la fonction $x(t)$ est strictement décroissante. En déduire que $]a, b[=]-\infty, +\infty[$.

5b) Déterminer $\lim_{t \to +\infty} x(t)$ et $\lim_{t \to -\infty} x(t)$.

Dans la question 6) on suppose que $x_0 > 1$.

6a) Montrer que $x(t)$ est strictement croissante. En déduire que $a = -\infty$ et déterminer $\lim_{t \to -\infty} x(t)$.

On veut prouver par l'absurde que $b < +\infty$. Supposons que $b = +\infty$.

6b) Montrer que $x(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$. En déduire qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $x'(t) > t^2 x(t)^2$.

6c) Montrer que pour tout $t > t_0$ on a

$$\frac{1}{x(t_0)} - \frac{1}{x(t)} \geqslant \frac{t^3 - t_0^3}{6}$$

et conclure.

FIN