UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

**Équations différentielles et calcul différentiel**

**Corrigé du devoir surveillé du 9 novembre 2017**

**le 9 novembre 2017**

Durée 1h30. Aucun document autorisé.

**TOUTES LES REPONSES DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES.**

**Exercice 1.** 1) Soit $A$ un matrice carrée de taille $n$ à coefficients réels. Donner, sans démonstration, la solution générale de l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions de cette équation?

**Réponse.** Confer cours.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.

2) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice $A$.

**Solution.** Le polynôme caractéristique de $A$ est

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2.$$

Donc $\lambda_1 = -1$ est l'unique valeur propre de $A$ (de multiplicité 2). On a

$$A - \lambda_1 I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Si $v = \binom{x}{y}$ est un vecteur propre, alors

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d'où $2x + y = 0$. Donc le sous-espace propre correspondant est le sous-espace de dimension 1 engendré par le vecteur $e_1 = \binom{1}{-2}$.

3) Calculer $e^{At}$, où $t$ est une variable.

**Solution.** Posons $e_2 = \binom{1}{0}$. Alors $e_1$ et $e_2$ forment une base de $\mathbf{R}^2$. On a $Ae_1 = -e_1$ et

$$Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 2e_1 + (-1)e_2.$$

Donc

$$A\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Posons $P = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$. Alors $A = P\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$. On note que

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

On a

$$\exp\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}t\right) = e^{-t}\begin{pmatrix}1 & 2t\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Donc

$$\exp(At) = P\exp\left(\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}t\right)P^{-1} = e^{-t}\begin{pmatrix}2t+1 & t\\ -4t & 1-2t\end{pmatrix}.$$

On considère le système d'équations différentielles suivant

$$(*) \qquad \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t),\\ y'(t) = -4x(t) - 3y(t).\end{cases}$$

4) Expliciter la solution générale du système (*).

**Solution.** On a

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \exp\left(At\right)\begin{pmatrix}C-1\\ C_2\end{pmatrix}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbf{R},$$

d'où

$$x(t) = C_1(2t+1)e^{-t} + C_2te^{-t}, \qquad y(t) = -4C_1te^{-t} + C_2(1-2t)e^{-t}.$$

5) Donner la solution du problème de Cauchy $x(0) = 2$, $y(0) = -2$.

**Solution.** Les conditions $x(0) = 2$, $y(0) = -2$ donnent $C_1 = 2$, $C_2 = -2$, d'où $x(t) = (2t+2)e^{-t}$, $y(t) = -(4t+2)e^{-t}$.

**Exercice 2.** On considère le système d'équation différentielles d'ordre 2:

$$(**) \qquad \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t),\\ y'(t) = -4x(t) - ky(t).\end{cases}$$

où $k \in \mathbf{R}$ est un paramètre fixé. Remarquons que le système étudié dans l'exercice 1 correspond au cas $k = 3$. Trouver les valeurs du paramètre $k$ pour lesquelles le portrait de phase du système (**) est

1) un centre;

**Solution.** La matrice du système est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -k \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de $A$ est

$$\chi_A(\lambda) == \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 4 & \lambda + k \end{vmatrix} = \lambda^2 + (k-1)\lambda + (4-k).$$

Le discriminant de $\chi_A(\lambda)$ est

$$D = (k-1)^2 - 4(4-k) = (k-3)(k+5)$$

et les valeurs propres de $A$ sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(k-1) \pm \sqrt{D}}{2}.$$

Le portrait de phase est un centre si $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont totalement imaginaires, d'où on trouve que $k = 1$. Comme pour $k = 1$ on a $D = -12$ et $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}i$, on trouve que le portrait de phase est un centre si et seulement si $k = 1$.

2) un foyer attractif;

**Solution.** Le portrait de phase est un foyer attractif si et seulement si $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ sont des nombres complexes conjugués avec $\alpha < 0$ ce qui corréspond aux conditions $D < 0$, $k - 1 > 0$. Comme $D < 0$ si et seulement si $k \in ]-5, 3[$, on en déduit que le portrait de phase est un foyer attractif si et seulement si $k \in ]1, 3[$.

3) un foyer répulsif;

**Solution.** Le portrait de phase est un foyer répulsif si et seulement si $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ sont des nombres complexes conjugués avec $\alpha > 0$ ce qui corréspond aux conditions $D < 0$, $k - 1 < 0$. Comme $D < 0$ si et seulement si $k \in ]-5, 3[$, on en déduit que le portrait de phase est un foyer répulsif si et seulement si $k \in ]-5, 1[$.

4) un noeud répulsif.

**Solution.** Le portrait de phase est un noeud répulsif si et seulement si $\lambda_{1,2}$ sont des nombres réels positifs ce qui corréspond aux conditions $det(A) > 0$, $Tr(A) > 0$ et $D > 0$. Comme $D > 0$ si et seulement si $k \in ]-\infty, -5[\cup]3, +\infty[$, $det(A) = 4 - k$ et $Tr(A) = 1 - k$, on en déduit que le portrait de phase est un noeud répulsif si et seulement si $k \in ]-\infty, -5[$.

**FIN**