**Ni documents, ni équipements électroniques sont autorisés.**

**Question 1** *(Barème indicatif: 2.5 points) Pour $t > 0$ on considère l'équation différentielle*

$$y'(t) = \frac{y}{t}\,(\ln(y) - \ln(t) + 1) \qquad y(1) = 4$$

(a) *Montrer qu'il existe une unique solution dans un voisinage $U$ de $t = 1$.* La fonction à droite satisfait $f(t, y) = \frac{y}{t}\,(\ln(y) - \ln(t) + 1) = h(y/t)$ avec $h(x) = x(\ln(x) + 1)$. Ainsi, $|\frac{\partial}{\partial y} f(t, y)| = |\frac{1}{t} h'(y/t)| \leq 1/a \max\{|2 + \ln(\xi)| : c/b \leq \xi \leq d/a\}$ si $t \in [a, b]$ avec $0 < a < b$, et $y \in [c, d]$ avec $0 < c < d$. Ainsi, $f$ est Lipschitzienne par rapport à $y$ - on a donc une solution 'locale' autour de $(t, y) = (1, 4)$ par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

(b) *Soit $y$ cette solution. Quelle équation différentielle satisfait alors $z(t) := \frac{y(t)}{t}$ sur $U$?*
On calcule la dérivée, remplace l'edo et simplifie: $z'(t) = y'(t)/t - y(t)/t^2 = \frac{1}{t} z \ln(z)$. Cette équation est à variables séparés.

(c) *Déterminer $z$, puis en déduire $y$, et vérifier qu'il s'agit bien de la solution recherché.* On a $z(1) = y(1)/1 = 4$. Alors

$$\int_4^z \frac{1}{x \ln(x)}\, dx \int_1^t \frac{1}{s}\, ds$$

L'indication est de dériver $g(u) = \ln(\ln(u))$ : $g'(u) = \frac{1}{u \ln(u)}$. On voit donc que la séparation des variables donne

$$\ln(\ln(z)) - \ln(\ln(4)) = \ln(t) - \ln(1)$$

ou bien $\ln(z(t)) = t \ln(4)$ ou bien $z(t) = \exp(\ln(4)t) = 4^t$. (Test: $z(1) = 4^1 = 4$ et $z'(t) = \ln(4)z(t) = z(t)\ln(z(t))/t$. OK.) Ainsi $y(t) = tz(t) = t4^t$.

**Question 2** *(Barème indicatif: 2 points) Trouver toutes les solutions de*

$$y^{(4)}(t) - y^{(3)}(t) - y''(t) - y'(t) - 2y(t) = -2t^2 - 3t$$

*Indication: le polynôme caractéristique possède deux racines simples, qui sont faciles à deviner.* $P(t) := t^4 - t^3 - t^2 - t - 2$ s'annule en $t = 2$ et $t = -1$ (on teste $t = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3..$). Une divsion avec reste revèle $P(t) = (t + 1)(t - 2)(t^2 + 1)$. Ainsi on a les solutions homogènes

$$y_1(t) = e^{-t} \qquad y_2(t) = e^{2t} \qquad y_3(t) = \sin(t) \qquad y_4(t) = \cos(t)$$

Reste à trouver une solution homogène. Par le cours, $y_p(t) = at^2 + bt + c$. On injecte dans l'eq. diff:

$$0 - 0 - (2a) - (2at + b) - 2(at^2 + bt + c) = -2t^2 - 3t$$

on compare les termes (commençant avec $t^2$), et obtient $a = 1$, $b = 1/2$, et $c = -5/4$. Toutes les solutions sont donc

$$y(t) = t^2 + t/2 - 5/4 + ae^{-t} + be^{2t} + c\sin(t) + d\sin(t)$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

**Question 3** *(Barème indicatif: 3.5 points) Donner toutes les solutions de $y'(t) = Ay(t)$ avec*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Trouver l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^3$ des valeurs initiales $y_0$ pour lesquelles le problème de Cauchy*

$$y'(t) = Ay(t), \qquad y(0) = y_0 \in E$$

*ait une solution 'stable' c'est à dire, satisfaisant* $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$. $A$ a deux valeurs propres, $\pm 1$. Pour $\lambda = 1$ (val. propre double) on a le VP $(0,1,0)$. Pour $\lambda = -1$ on a le VP $(1,0-1)$. Ceci donne déjà 2 solutions indépendantes, $y_1(t) = e^t(0,1,0)$ et $y_3(t) = e^{-t}(1,0-1)$. Pour une troisième solution on complète $v_1 = (0,1,0)$ en une base de $\ker((I-A)^2)$. Le plus simple est de résoudre $(I-A)v_2 = v_1$. On trouve $v_2 = (0,0,1)$. Alors un système fondamental est

$$\left\{ e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^t \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right], e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Toute solution est combinaison linéaire de ces 3 fonctions. En $t = 0$, on a donc

$$y(0) = y_0 = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La condition $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$ ne permet pas les termes $e^t$ dans la solution. Il faut donc enforcer $a = b = 0$ par le choix de $y_0$. Puisque $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$, il suit que $y_0$ doit être collinéaire à $v_3 = (1, 0, -1)$.

**Question 4** *(Barème indicatif: 3.5 points) Soit* $X : I \to \mathbb{R}^2$, $X(t) = (x(t), y(t))^{\mathsf{t}}$. *On souhaite étudier le problème de Cauchy suivant :*

$$\text{(E)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} X'(t) & = & \big(y(t) - x(t)^3, -x(t) - y(t)^3\big)^{\mathsf{t}} \\ X(0) & = & (x_0, y_0)^{\mathsf{t}} \end{array} \right.$$

(a) *Montrer que $E$ admet une unique solution maximale, qu'on notera $(X, I)$.*
*Soit $I_+ := I \cap [0, \infty)$ et $I_- = I \cap (-\infty, 0)$.* La fonction $F(t, x, y) = (y - x^3, -x - y^3)$ est continue et continument différentiable en $x, y$, donc localement Lipschitz dans "les variables espace $(x, y)$" . Ainsi, pour toute valeur initiale $(x_0, y_0)$ il existe $\varepsilon > 0$ et une solution locale sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Celle-ci permet une extension maximale (thm des bouts).

(b) *On définit l'énergie $H(t) := x(t)^2 + y(t)^2$. Montrer que $H(t)$ est décroissante sur $I_+$, puis expliciter $I_+$.* $H'(t) = 2x'(t)x(t) = 2y'(t)y(t) = 2x(t)(y(t) - x(t)^3) + 2y(t)(-x(t) - y(t)^3) = -2(x(t)^4 + y(t)^4) \le 0$ d'où la décroissance de $H$. $I_+$ est de la forme $[0, M)$ avec $M$ finie ou $M = +\infty$. Si $M$ était finie, on aurait une "explosion" de la solution avec $t \to M-$ par les thm des bouts, donc $H(t) \to +\infty$. Mais $H(t) \le H(0)$ exclut ceci. Forcément, $I_+ = [0, +\infty)$.

(c) *Montrer qu'on a, pour tout $t \in I$,*

$$-2H^2(t) \le H'(t) \le -H^2(t).$$

$H(t)^2 = x(t)^4 + 2x(t)^2y(t)^2 + y(t)^4$ d'òu l'inégalité de droite. Celle de gauche provient de $(a-b)^2 \ge 0$.

(d) *En déduire que $I_-$ est minoré: proposer un minorant explicite de $I$ en fonction de $x_0$ et $y_0$.* Observons que $H(t) = H(0) + \int_0^t H'(s)ds$ implique

$$H(0) - 2\int_0^t H^2(s)ds \le H(t) \le H(0) - \int_0^t H^2(s)ds$$

Autrement dit, $H$ est encadré par les deux solutions de $y' = -2y^2$ et de $y' = -y^2$, avec $y(0) = H(0) = x_0^2 + y_0^2$ dans les deux cas. Ainsi,

$$\frac{1}{2t + \frac{1}{x_0^2+y_0^2}} \le H(t) \le \frac{1}{t + \frac{1}{x_0^2+y_0^2}}$$

La minoration explose quand $2t + \frac{1}{x_0^2+y_0^2} = 0$, i.e. $t = \frac{-1}{2(x_0^2+y_0^2)}$, donc $H(t)$ aussi. Ainsi, $I_- \subset [\frac{-1}{2(x_0^2+y_0^2)}, 0]$.

(e) *Montrer que $X$ admet une limite lorsque $t \to +\infty$; la déterminer.* On voit par la dernière double-inégalité que $H(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$, donc $X(t) \to (0,0)$.

**Question 5** *(Barème indicatif: 2 points)* Soit

$$F(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} x^2 + 2x - 2y + u\cos(x) + \arctan(v) \\ xy + \cos(xv) - e^{u^2} + (x-1)v \end{pmatrix}.$$

(a) *Énoncer le théorème des fonctions implicitement définies.* Cours.

(b) *Montrer qu'il existent deux voisinages $U, V$ de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une fonction $g : U \to V$ de classe $C^1$ tel que, $F(x,y,g(x,y)) = 0$ sur $U$.*

$$J_F(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 2x+2-u\sin(x) & -2 & \cos(x) & (1+v^2)^{-1} \\ y - v\sin(xv) + v & x & 2ue^{u^2} & x-1 \end{pmatrix}$$

$F$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^4$ car ces 8 fonctions sont continues.

$$J_F(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La sous-matrice des deux dernières colonnes au point $(0,0,0,0)$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et donc inversible. On conclut par le théorème des fonctions implicitement définies.

(c) *Quel est le polynôme de Taylor d'ordre 1 de $g$ au point $(0,0)$?* On a

$$D_g(0,0) = -(D_2F(0,0))^{-1}(D_1F(0,0)) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + r(x,y)$ avec $\frac{\|r(x,y)\|}{\|(x,y)\|} \to 0$. L'approximation polynomiale d'ordre 1 autour de $(0,0)$ est donc $P_g(x,y) = \begin{pmatrix} -2x+2y \\ 0 \end{pmatrix}$.

**Question 6** **(question de cours)** *(Barème indicatif: 2.5 points)* Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $a \in \Omega$. Soit $f : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\Omega \setminus \{a\})$. Supposons que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ existe. On pose alors

$$\widehat{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in \Omega \setminus \{a\} \\ \ell & \text{si} \quad x = a \end{cases}$$

(a) Montrer que si $d_k := \lim_{x \to a} \frac{\partial}{\partial x_k} f(x)$ existe pour tout $k = 1..n$, alors $\widehat{f}$ est différentiable en $x$=$a$; de plus, sa différentielle est représenté par le vecteur en ligne $\nabla \widehat{f}(a) = (d_1, \dots, d_n)$. *Indication: relier $f(a)$ et $f(a+h)$ par une courbe paramétré (une ligne droite, par exemple) pour utiliser le théorème fondamental du calcul différentiel.*

$$f(a+h) = f(a) + \int_0^1 D_f(a+th)h dt$$

Donc

$$\|f(a+h) - f(a) - (d_1, \dots, d_n).h\| \le \left( \int_0^1 \|D_f(a+th) - (d_1, \dots, d_n)\| \, dt \right) \|h\|$$

et l'intégrale tend vers zero quand $h \to 0$ par hypothèse d'existence des limites $d_j$.

(b) *Justifier que $\widehat{f}$ est même de classe $C^1(\Omega)$.* Les dérivées partielles de $\widehat{f}$ sont contuinues sur $\Omega$.

**Question 7** *(Barème indicatif: 5 points)* Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^2$. On suppose que $F(x^*) = 0$ et que la différentielle $D_F(x^*)$ est inversible.

(i) *Montrer que la différentielle $D_F(x)$ est inversible pour tout $x \in B(x^*, R)$, pour un certain $R > 0$.* La différentielle est continue par hypothèse. Si son déterminant est non-nul dans un point, alors il est non-nul dans un voisinage de ce point.

(ii) Montrer que $D_F(x^* + h)^{-1} - D_F(x^*)^{-1} = O(\|h\|)$ lorsque $h \to 0$.
*Indication: l'identité $A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}$ s'avère utile.*

$$D_F(x^* + h)^{-1} - D_F(x^*)^{-1} = -D_F(x^* + h)^{-1}(D_F(x^* + h) - D_F(x^*))D_F(x^*)^{-1}$$

et $(D_F(x^* + h) - D_F(x^*)) = D_F^2(x^*)h + r(h)$. les deux autres différentielles sont bornés dans tout voisinage de $x^*$.

(iii) *Expliciter le polynôme de Taylor de degré 1 de $F$ au point $x^*$.*
$P(x) = 0 + D_F(x^*)(x)$.

(iv) Pour $x \in B(x^*, R)$, soit $N(x) = x - D_F(x)^{-1}(F(x))$. Montrer que $N$ est différentiable en $x = x^*$ en développant $N(x^* + h) - N(x^*)$. Expliciter $D_N(x^*)$

$$\begin{aligned} N(x^* + h) - N(x^*) &= N(x^* + h) - x^* \\ &= h - D_F(x^* + h)^{-1}(F(x^* + h)) \\ &= h - D_F(x^* + h)^{-1}(0 + D_F(x^*)(h) + r(h)) \\ &= h + (D_F(x^*)^{-1} - D_F(x^* + h)^{-1})(h + r(h)) - h \\ &= (D_F(x^*)^{-1} - D_F(x^* + h)^{-1})(h + r(h)) \end{aligned}$$

la différence des différentielles est $O(\|h\|)$, donc $N(x^* + h) - N(x^*)$ est $O(\|h\|^2)$. On déduit $N$ differentiable en $x^*$ avec $D_N(x^*) = 0$ !

(v) *Montrer qu'il existe $0 < r < R$ tel que $\|D_N(x)\| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $x \in A := B[x^*, r]$. En déduire que $N(A) \subset A$.*
$D_N$ est continue car $F$ est de classe $C^2$. D'où l'existence du $0 < r < R$. $N(x) - x^* = N(x) - N(x^*) \leq r \max\{\|D_N(tx^* + (1-t)x)\| : \quad 0 \leq t \leq 1\}$ par inégalité des accroissements finis. D'où $N(A) \subset A$.

(vi) *Déterminer la limite de la suite récursive, définie par $x_0 \in A$ et*

$$x_{n+1} := N(x_n) \qquad \text{pour } n \geq 0.$$

*Énoncer le théorème utilisé et vérifier soigneusement les hypothèses.* Thm du point fixe (cours). $N$ est une contraction stricte sur $A$, il suit $(x_n) \to x^* = N(x^*)$, l'unique point fixe de $N$ sur $A$.

— FIN —