

Exercice 1 Considérer la fonction

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(x + \cos(y)) \\ x + \sin(x^2 + y) \end{pmatrix}.$$

- Expliciter un voisinage de $(0, 0)$ sur lequel F est définie.
- Déterminer le polynôme de Taylor ordre 2 de F autour de $(0, 0)$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\pi x) + z \cos(\pi x) \\ z \sin(\pi x) \\ xyz \end{pmatrix}$$

Etablir un critère sur (x, y, z) qui garantit que f admet une inverse locale dans un voisinage U de (x, y, z) . Soit $a := (1, 0, -1)$ et $b := (1, 0, 0)$. Justifier qu'il existent des voisinages U de a et V de b telles que $f : U \rightarrow V$ est inversible. Calculer la matrice Jacobienne de f^{-1} au point b .

Exercice 3 Soit $F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy^2 + xzu + yv^2 - 3 \\ u^3yz + 2xv - u^2v^2 + 40 \end{pmatrix}.$$

Observer que $F(1, 1, 1, 1, 1) = (0, 42)$. Montrer qu'il existe un voisinage U dans \mathbb{R}^5 de $a = (1, 1, 1, 1, 1)$ et deux fonctions $g, h : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ avec $g(a) = h(a) = 1$, telles que

$$F(x, y, z, g(x, y, z), h(x, y, z)) = (0, 42)$$

pour tout $(x, y, z) \in U$. Expliciter les gradients de g, h au point $(1, 1, 1)$.

Modalités. Ce DM est rendu au début du TD le vendredi 12 Novembre à 15h30 (en cas d'absence justifié par email avant cette heure à votre professeur de TD contenant un scan soigneux).

Correction: Nous allons développer ensemble un corrigé au tableau. Ensuite les étudiants présents corrigeront les copies de leurs camarades ("correction croisée") et proposent une note. Les copies ainsi pré-corrigées seront re-vérifiées par votre professeur pour attribuer la note finale du DM (avec un point bonus pour une bonne correction ou point malus en cas d'une correction de mauvaise foi). Cette procédure nécessite d'écrire votre nom soigneusement et lisiblement sur chaque page du DM, et de réserver un peu de place pour la correction. Aussi, éviter les couleurs rouges et vertes pour la composition – elles seront réservés pour la pré-correction, respectivement correction finale. Le 12 Novembre, venir avec un stylo rouge au TD, SVP.