Le sujet ne cherche à vous embêter avec des calculs l'algèbre linéaire. L'utilisation de logiciels (maple, matlab, scilab, octave, etc) est donc explicitement autorisé pour les calculs de valeurs / vecteurs propres, matrice inverses, etc. à condition d'écrire le code utilisé dans la rédaction, de donner les résultats intermédiaires compréhensibles, et de bien expliquer la démarche générale. En particulier, il ne sera pas acceptable de se contenter de donner la solution trouvé par une machine.

Exercice 1 Pour les matrices $(A_i)_{i=1,2}$ suivantes, calculer la solution de $y_i'(t) = A_i y_i(t)$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 7 & 18 & 8 \\ -18 & -42 & -19 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 3 & 6 & 4 \\ -3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Trouver toutes les solutions de

$$y^{(4)} - 3y^{(3)} - 3y'' + 11y' - 6y = f(t)$$

pour les second membres $f(t) = e^t$ et pour $f(t) = e^{3t}$.

Indication aux exercices 1 & 2: la vision de la vidéo
`https://mediapod.u-bordeaux.fr/video/10986-regarde-moi`
peut s'avérer utile.

Exercice 3 Soit

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & \frac{1}{1+t} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+t} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N(t) = \begin{pmatrix} 0 & z(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Justifier que le problème de Cauchy $x'(t) = D(t)x(t)$ avec $x(0) = x_0$ admet une solution unique sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^2$, puis donner une fonction matricielle $\Phi(t)$ satisfaisant $\Phi'(t) = D(t)\Phi(t)$.

b) Justifier que le problème de Cauchy $y'(t) = A(t)y(t)$ avec $y(0) = y_0$ admet une solution unique pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^2$. Pour trouver un système fondamental, on cherche une fonction matricielle $\Psi(t)$ satisfaisant $\Psi'(t) = A(t)\Psi(t)$ sous la forme ("Ansatz")

$$\Psi(t) = \Phi(t) + N(t).$$

Déduire une équation différentielle pour la fonction inconnue z, puis la résoudre. Expliciter ainsi $\Psi(t)$.

c) Utiliser Ψ pour résoudre le problème

$$y'(t) = A(t)y(t) + b(t) \qquad \text{avec} \quad b(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 - t^2 \\ 1 + t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y(0) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

par la méthode de la variation de constante.

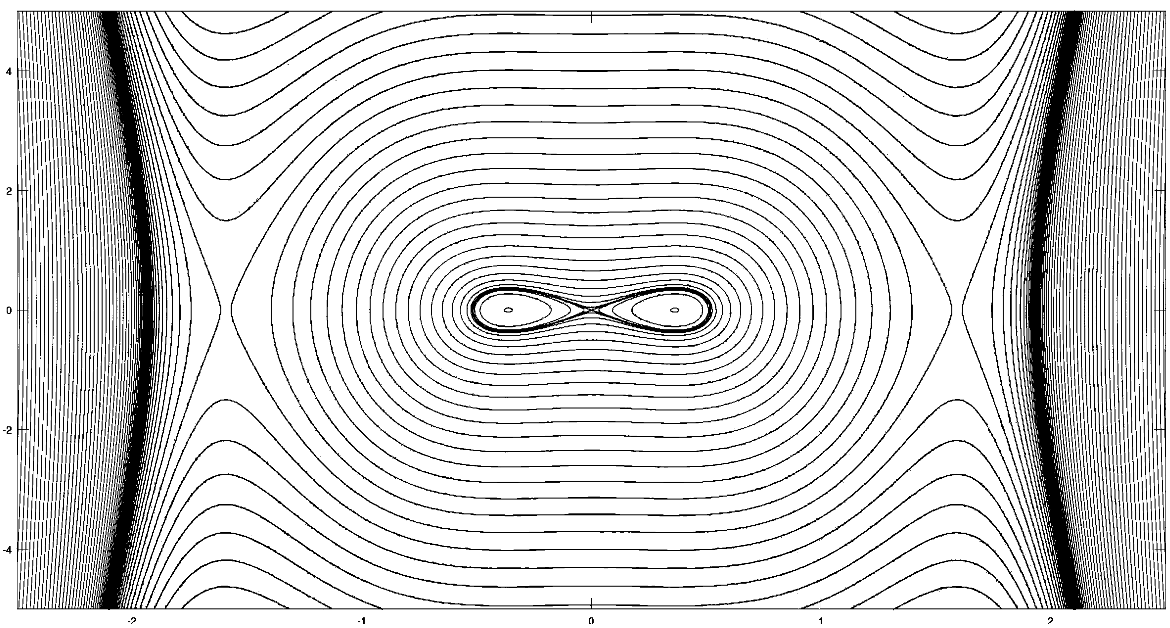
tourner la page, s.v.p.

Exercice 4 On cherche à obtenir des informations sur le système non-linéaire suivant

$$(*) \qquad \begin{cases} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= 6x(t)^5 - 16x(t)^3 + 2x(t) \end{cases}$$

a) Soit $z(t) = (x(t), y(t)$. Réécrire l'équation différentielle $(*)$ sous la forme $z'(t) = F(z(t))$.
b) Montrer que le problème de Cauchy donné par $(*)$ avec une condition initiale $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ admet une unique solution maximale dans un voisinage I de 0.
c) Déterminer l'unique solution de $(*)$ pour $x_0 = y_0 = 0$.
d) Soient (x_0, y_0) et (x_1, y_1) deux valeurs initiales. On note φ_1, φ_2 les solutions de $(*)$ associés sur I_1 et I_2 (maximales) respectivement. Supposons que pour deux temps $t_i \in I_i$ $(i = 1, 2)$ on ait $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2)$. Montrer que la fonction $\psi(t) = \varphi_1(t + t_1 - t_2)$ est encore une solution à $(*)$ avec $\psi(t_2) = \varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2)$. En déduire $\psi = \varphi_2$.

   Rephraser le résultat: deux orbites[1] de solutions à $(*)$ sont soit disjoints, soit ...
e) Soit $H(a, b) = -a^6 + 4a^4 - a^2 + \frac{1}{2}b^2$ et $g(t) = H(x(t), y(t))$. Calculer $g'(t)$ pour $t \in I$. Que peut on en déduire? Voici un plot des lignes de niveau de H.



f) Supposons pour le reste de l'exercice $x_0 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ et $y_0 = 0$. Sur quelle ligne de niveau de H se trouve la solution $(x(t), y(t))$?
g) En déduire que $x(t) \in [-x_0, x_0]$ pour tout $t \in I$ et que la solution $(x(t), y(t))$ existe pour tout $t \in \mathbb{R}$.
h) Montrer que $x(t_0) = 0$ pour un $t_0 \in \mathbb{R}$ implique $x(t) = 0$ pour tout t (pensez aux orbites). En déduire que $x(t) \in (0, x_0]$.
i) Supposons par l'absurde qu'il existe $t^* > 0$ tel que $y(t^*) > 0$. Soit alors

$$t_{\min} := \inf\{t > 0 : \quad y(t) > 0\}.$$

   Montrer que $y(t_{\min}) = 0$ et donc $x(t_{\min}) = x_0$. Que dire du signe de x' proche de $t_{\min}$? En déduire une contradiction.
j) Conclure que $x(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$.

---

[1]Vocabulaire tiré de la méchanique. On appelle l'orbite d'une solution φ l'ensemble points $\{\varphi(t) : t \in I\}$