Pour une fonction $f \in L^1(\Omega)$ on dénote $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ la distribution

$$T_f : \quad \varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Exercice 1 Soit $f(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, puis déterminer ses trois premières dérivées.

Exercice 2 Pour $g(x) = \log(|x|)$ sur $\mathbb{R}$, montrer que $T_g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, puis calculer T_g' (indication: considérer les parties $|x| > \varepsilon$ et $|x| \le \varepsilon$; puis considérer la limite $\varepsilon \to 0+$).

Exercice 3 Considérer $u_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$. Montrer que $T_{u_n} \to 0$ au sens de distributions.

Exercice 4 Soit f la fonction sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \ge y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Démontrer que $T_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

(b) Calculer $\frac{\partial T}{\partial x}$.

Exercice 5

(a) Soit $f : \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ donné par $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Est-ce que $T_f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$? (indication: pensez aux coordonnés polaires!).

(b) Dans $\mathbb{C}^*$, on a clairement $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(z)$ où $f_\varepsilon(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2+\varepsilon^2}$. Montrer que $T_{f_\varepsilon} \to T_{1/z}$ dans le sens de distributions (on pourra identifier $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ pour ce ramener aux idées de la première question).

Exercice 6 Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $T' = 0$ implique $T =$ constant.
Indication: Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Justifier qu'on trouve un $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\int_\mathbb{R} \theta(x)\,dx = 1$. On pose

$$\varphi(x) = \psi(x) - c\,\theta(x) \qquad \text{où} \quad c = \int_\mathbb{R} \psi(t)\,dt.$$

Considérer une primitive de φ pour faire intervenir l'hypothèse.