Exercice 1 *Calculer la transformé de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de T_f pour $f(x) = |x|$.* D'abord: l'exercice voulu est: $f(x) = exp(-|x|)$, ce qui aurait été un joili rechauffement. Pour $|x|$, une fonction non-borné, le plus simple est de calculer $\mathcal{F}(\text{signe } x) = \mathcal{F}(H(x) - H(-x))$ (qui est trouvé dans l'ex 4, puis de remarquer que $\mathcal{F}(f')(\xi) = -i\xi\mathcal{F}(f)$ pour déduire $cF(|x|)$.

Exercice 2 *Soit $\langle T, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,x)\,dx$ pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.*

(a) *Montrer que T est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^2$.* On a

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x,x)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} \times |(1+x^2)\varphi(x,x)|\,dx \le \pi N_2(\varphi).$$

(b) *On cherche à calculer $\widehat{T}$. Montrer que $\langle T, \widehat{\varphi}\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} I_\varepsilon$ où*

$$I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon\xi^2}\widehat{\varphi}(\xi,\xi)\,d\xi.$$

Cece est convergence dominé, $\widehat{\varphi}(\xi,\xi)$ étant le majorant.

(c) *En explicitant $\widehat{\varphi}(\xi,\xi)$, montrer que*

$$I_\varepsilon = \sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-y^2}\varphi(x, \sqrt{2\varepsilon}y - x)\,d(x,y)$$

remplacer $\widehat{\varphi}(\xi,\xi) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)e^{-i(x\xi+y\xi)}\,d(x,y)$ puis Fubini; on connait la trasformation de Fourier de la Gaussienne $e^{-\varepsilon\xi^2}$, finalement un changement de variables arrange le résultat.

(d) *En déduire $\widehat{T}$.*

$$\widehat{T} = \sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-y^2}\varphi(x,-x)\,d(x,y)$$

a nouveau par convergence dominé.

Exercice 3 *Soit $\langle T, \varphi\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n)$ et $\langle T_n, \varphi\rangle = \sum_{|k|\le n} \varphi(k)$.*

(a) *Montrer que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ (on pourra insérer une expression $p(n)/p(n)$ dans la somme où p est un polynôme convenable).*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+n^2}|(1+n^2)\varphi(n)| \le cN_2(\varphi).$$

(b) *Montrer que $T_n \to T$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.* Il s'agit de la convergence faible, il suffit de voir

$$\sum_{|n|>J} \varphi(n) \longrightarrow 0$$

quand $J \to +\infty$ ce qui est clair par la question précendete (la somme converge).

(c) *Calculer $\mathcal{F}T_n$, puis utiliser les résultats de l'exercice 5 de la feuille 3 pour montrer que $\widehat{T} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$.* Il suffit de voir $\mathcal{F}(\delta_n)(\xi) = e^{-in\xi}$, puis on retombe exactement dans l'exercice cité.

Exercice 4

(a) *On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'$ est paire (resp. impaire), si $\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \check{\varphi}\rangle$ (resp. $\langle T, \varphi\rangle = -\langle T, \check{\varphi}\rangle$) pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$ où $\check{\varphi}(x) \overset{def}{=} \varphi(-x)$.*

Montrer que si T est une distribution tempérée paire, alors $\mathcal{F}^{-1}T = \mathcal{F}T$. De même, montrer que si T est une distribution tempérée impaire, alors $\mathcal{F}^{-1}T = -\mathcal{F}T$.

$$\langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi\rangle = \langle T, \mathcal{F}-1\varphi\rangle = \langle T, \check{\widehat{\varphi}}\rangle = \langle T, \widehat{\varphi}\rangle == \langle \mathcal{F}T, \varphi\rangle$$

(b) *Montrer que la valeur principale $T = vp(1/x)$ est une distribution tempérée.* La fonction $f(x) = \log(|x|)$ est tempérée, sa dérivé est $\mathrm{vp}(1/x)$. En effet, pour tout φ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\langle \mathrm{vp}, \varphi\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Prouvons d'abord la formule donnée :

$$\langle \mathrm{vp}(1/x), \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{x} dx.$$

Dans la première intégrale, on retranche $\varphi(0)$ (ce qui est possible car son intégrale sur $[-1, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, 1]$ est nulle). Mais alors, la fonction $(\varphi(x) - \varphi(0))/x$ est intégrable au voisinage de 0 (elle se prolonge par continuité). D'où la formule, qui fait apparaître $\mathrm{vp}(1/x)$ comme somme de deux distributions. La deuxième donne clairement une distribution tempérée (car elle est associée à une fonction intégrable à croissance modérée). Pour la première, il suffit de remarquer que

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \right| \leq 2 \sup_{u\in[-1,1]} |\varphi'(u)| \leq 2N_1(\varphi).$$

Ceci garantit là encore qu'il s'agit d'une distribution tempérée.

(c) *Que vaut xT ? Calculer sa transformée de Fourier.*

$$\langle xT, \varphi\rangle = \langle T, x\varphi(x)\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|x|>\varepsilon} \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx$$

en vertu du théorème de la convergence dominé. On obtient $xT = \mathbf{1}$ et donc $\mathcal{F}(xT) = \delta_0$.

(d) *En déduire que $\frac{d}{d\xi}(\mathcal{F}T) = -2\pi i\, \delta$ pour montrer ensuite que $\widehat{T} = -2\pi i Y + c$ où Y est la fonction de Heaviside et c une constante.*

Puisque $\delta = \mathcal{F}(xT) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\xi}(\mathcal{F}T)$ on a bien $\frac{d}{d\xi}(\mathcal{F}T) = -2\pi i\, \delta$. Mais on a également $(-2\pi i Y)' = -2\pi i\, \delta$, d'où $S' = (\mathcal{F}T + 2\pi i Y)' = 0$ et donc $\mathcal{F}T = \widehat{T} = -2\pi i Y + c$ pour une constante $c \in \mathbb{R}$ (on rappelle que le lemme "Si $S' = 0$, alors $S =$ constant" a été démontré dans le TD).

(e) *La distribution T est-elle paire ou impaire (voir exercice précédent)? Que peut on donc dire de $\mathcal{F}T$? En déduire la valeur de la constante c.*
Le changement de variables $y = -x$ montre que T est impaire. Donc $\mathcal{F}T$ est impaire d'où $-2\pi i + c = -c$ et donc $c = i\pi$. On conclut

$$\mathcal{F}T = i\pi - 2\pi i Y = \begin{cases} -i\pi & \xi > 0 \\ i\pi & \xi < 0 \end{cases}$$

(f) *En déduire $\mathcal{F}Y = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2\pi i}\, vp(1/x)$.*
Prenons la transformation de Fourier au deux membres de l'égalité $\widehat{T} = -2\pi i Y + i\pi$:

$$\check{T} = \mathcal{F}^2 T = -2\pi i(\mathcal{F}Y) + \tfrac{1}{2}\delta.$$

Puisque T est impaire, $\check{T} = -T$ d'où $\mathcal{F}Y = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2\pi i}T = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2\pi i}\mathrm{vp}$.

Exercice 5

(a) *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ tel que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,ds = 1$. On pose $f_n = nf(nt)$. Montrer que $T_{f_n} \to \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.* Exercice standard: faire un changement de var. pour intégrer $\varphi(x/n)f(x)$, ce qui converge par convergence dominé contre $\varphi(0)\int f(x)\,dx = \varphi(0)$.

(b) En utilisant le théorème de Weierstrass, déduire de la question précédente qu'il existe une suite de polynômes P_n tel que $T_{P_n} \to \delta$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
Indication: choisir des intervalles I_n qui exhaustent $\mathbb{R}$, puis approcher f_n sur un I_n convenablement. Si on approche f_n sur $[-n, n]$ par un polynôme P_n à un erreur (en norme sup.!) d'au plus $1/n^2$ près,

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \lim \int f_n(t)\varphi(t)\,dt \\ &= \lim\Big(\int_{[-n,n]} (f_n(t) - P_n(t))\varphi(t)\,dt \\ &\quad + \int_{|t|>n} f_n(t)\varphi(t)\,dt + \int_{[-n,n]} P_n(t)\varphi(t)\,dt\Big)\end{aligned}$$

Le premier terme est majoré par $2N_0(\varphi)/n$, le deuxième est égal à $\int_{|x|>n^2} f(x)\varphi(x/n)\,dx$ qui tend vers 0 par convergece dominé, d'où l'assertion.

(c) Montrer qu'il n'existe pas une telle suite de polynômes qui converge vers δ_0 dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Indication: Passer en Fourier et raisonner par l'absurde. La ligne (à vous d'expliciter les détails) est ainsi:

(i) *Rappeler $\mathcal{F}(x^k)$ et $\mathcal{F}\delta$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.* voir cours.

(ii) *Supposons (donc par absurde) l'existence d'une suite de polynômes P_n tel que $P_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} \delta$. Puisque $\mathcal{F}\mathcal{S}' = \mathcal{S}'$, ceci equivaut une convergence d'une suite de «polynômes en $\delta^{(k)}$» vers $\mathbf{1}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:*

$$\langle \sum_{k=0}^{d_n} a_{k,n}\delta^{(k)}, \varphi\rangle \longrightarrow \langle \mathbf{1}, \varphi\rangle.$$

Ceci est absurde: expliquer qu'il existe une fonction positive de $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *pour laquelle le coté gauche est constamment 0 tandis que sur la droite la valeur est non-nulle.* Effectivement, il suffit de regarder un φ dans le support ne contient pas l'origine.