Devoir surveillé et son corrigé, Analyse Fonctionnelle

Durée : 3h

Exercice 1 : Montrer que les opérateurs suivants sont continus et calculer leurs normes.

(a) $T_1 : \ell^2 \to \ell^2$, $T_1((x_n)_{n\geq 0}) = (x_{n+1})_{n\geq 0}$.
Évidemment, T_1 est linéaire. En effet,pour $x = (x_n), y = (y_n) \in \ell_2$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a $[T_1(\alpha x + \beta y)]_n = \alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1} = \alpha[T_1(x)]_n + \beta[T_1(y)]_n$. T_1 est donc continu ssi il est borné. On a

$$\|T_1(x)\|_{\ell_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 = \|x\|^2$$

et donc T_1 est continu avec $\|T_1\| \leq 1$. Soit e_k l'élément $(\delta_{kn})_{n\geq 0}$ de ℓ_2. De $\|T_1 e_1\| = \|e_2\| = 1 = \|e_1\|$ on déduit $\|T_1\| = 1$.

(b) $T_2 : L^2([0,1]) \to \mathbb{C}$, $T_2(f) = \int_0^1 x^2 f(x)\, dx$.
On remarque que $T_2 f = (f|g)$ où $g(x) = x^2$. T_2 est donc linéaire et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a que T_2 est continu avec $\|T_2\| \leq \|g\|_2 = 1/\sqrt{5}$. Si l'on choisit $f(x) = g(x) = x^2$ on obtient $\|T_2 f\| = 1/5 = 1/\sqrt{5}\|f\|$ et donc $\|T_2\| = 1/\sqrt{5}$.

(c) $T_3 : L^\infty([0,1]) \to \mathbb{C}$, $T_3(f) = \int_0^1 x^2 f(x)\, dx$.
Par la linéarité de l'intégrale, T_3 est linéaire. Observons que

$$|T_3(f)| \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \int_0^1 x^2\, dx = 1/3\|f\|$$

et donc que T_3 est continu avec $\|T_3\| \leq 1/3$. Si $f \equiv 1$ cette valeur est atteinte, d'où $\|T_3\| = 1/3$.

Exercice 2 : Soit (E, d) un espace métrique et $K \subseteq E$ un compact non vide.

(a) *Montrer que pour tout $x \in E$, $\{x\}$ est un fermé.*
Observons que $\{x\} = \bigcap_{n\geq 1} B_f(x, 1/n)$. Étant une intersection de fermés,$\{x\}$ est fermé.

(b) *Montrer que (K, d) est un espace métrique complet.*
Évidemment, K hérite la distance de E, (K, d) est donc un espace métrique. Tout recouvrement d'ouverts de K (dans la topologie induite !) donne un recouvrement d'ouverts de K dans E dont on peut choisir un recouvrement fini par la compacité de K dans E. On vient de vérifier que K est un espace métrique compact. Par un théorème du cours (voir aussi le DM1) on sait que (K, d) est donc un espace métrique complet.

(c) *On suppose désormais que K est dénombrable ; on peut donc écrire $K = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}\{x_j\}$. Montrer qu'il existe un j_0 tel que $\{x_{j_0}\}$ est un ouvert de K (pour la topologie induite).* Puisque $A_j = \{x_j\}$ est fermé, et (K, d) est un espace métrique complet tel que $K = \bigcup_j A_j$ il y a par le théorème de Baire un A_j dont l' intérieur est non vide. Cela dit clairement qu'il existe un j_0 tel que $\{x_{j_0}\}$ est un ouvert de (K, d).

(d) *En déduire que K possède un point isolé dans E, c'est-à-dire qu'il existe un rayon $r > 0$ et un $x \in K$ tel que l'on ait (dans E)*

$$\{x\} = B(x, r) \cap K.$$

On vient de voir qu'il existe un j_0 tel que $\{x_{j_0}\}$ est un ouvert de K pour la topologie induite, ce qui veut dire qu'il existe un $\varepsilon > 0$ et $y \in E$ tel que $\{x_{j_0}\} = K \cap B(y, \varepsilon)$. En remarquant que $x_{j_0} \in B(y, \varepsilon)$ l'inégalité triangulaire montre l'existence d'un rayon $r > 0$ (il suffit de prendre $r < \text{dist}(x_{j_0}, \partial B(y, \varepsilon))$) tel que $B(x_{j_0}, r) \cap K = \{x_{j_0}\}$, d'où l'assertion.

Exercice 3 : *Rappelons qu'un espace métrique est dit séparable s'il contient un sous-ensemble dénombrable qui est dense.*

I) *Soit c_0 l'espace des suites réelles qui convergent vers 0. Cet espace est muni de sa norme usuelle $\|.\|_\infty$. On note c_{00} l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.*

(a) *Montrer que c_0 est un espace de Banach.* Il serait admis d'utiliser que ℓ_∞ est un espace de Banach. Pour une démonstration complète, on ajoute l'argument :
Soit (x_n) une suite de Cauchy dans ℓ_∞. On écrit $x_n = (\xi_{n,j})_{j\geq 0}$. Or

$$|\xi_{n,j} - \xi_{m,j}| \leq \sup_k |\xi_{n,k} - \xi_{m,k}| = \|x_n - x_m\|,$$

$(\xi_{n,j})_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. On note $\xi_j = \lim_n \xi_{n,j}$ et $x = (\xi_j)$. Pour $\varepsilon = 1$ il existe un M tel que pour tout $n \geq M$ on ait $\|x_n\| - \|x_N\| \leq \|x_n - x_M\|_\infty \leq 1$. Donc

$$\|x_n\| \leq C = \max(\|x_1\|, \ldots, \|x_{N-1}\|, 1 + \|x_N\|),$$

autrement dit, des suites de Cauchy sont bornées. Donc $|\xi_{j,n}| \leq C$ pour tout j, n d'où $|\xi_j| \leq C$ et donc $x \in \ell_\infty$.
Pour montrer la convergence de x_n vers x, remarquons que pour $\varepsilon > 0$ il existe un M_ε tel que pour tout $n, m \geq M_\varepsilon$ on ait $\|x_n - x_m\|_\infty \leq \varepsilon/2$. Par convergence des $(\xi_{j,n})_n$ pour tout $j \in \mathbb{N}$ il existe un $m_j \geq M_\varepsilon$ tel que $|\xi_{j,n} - \xi_j| \leq \varepsilon/2$. Les deux estimations ensemble entraînent que

$$|\xi_{j,n} - \xi_j| \leq |\xi_{j,n} - \xi_{j,n_j}| + |\xi_{j,n_j} - \xi_j| \leq \|x_n - x_{n_j}\|_\infty + \varepsilon/2 \leq \varepsilon$$

pour tout $n \geq M_\varepsilon$. Cette estimation est indépendante de j, on a donc $\|x_n - x\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq M_\varepsilon$. Ceci montre que ℓ_∞ est un espace de Banach.
Montrons maintenant que c_0 est un sous-espace fermé de ℓ_∞. Soit (x_n) une suite dans c_0 qui converge vers $x \in \ell_\infty$ dans la norme sup. On montre que $x \in c_0$: Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un N tel que $\|x - x_N\|_\infty \leq \varepsilon/2$ et il existe (pour cet N) un k_ε tel que $|\xi_{N,j}| \leq \varepsilon/2$ pour tout $j \geq k_\varepsilon$. Donc :

$$|\xi_j| \leq |\xi_j - \xi_{j,N}| + |\xi_{j,n}| \leq \|x - x_N\|_\infty + \varepsilon/2 \leq \varepsilon$$

pour tout $j \geq k_\varepsilon$. Ceci montre bien que $x \in c_0$.

(b) *Quelle est l'adhérence de c_0 dans ℓ^∞ ?* // Puisque c_0 est fermé, $\overline{c_0}^{\ell^\infty} = c_0$.

(c) *Montrer que c_{00} est dense dans c_0. Est-ce que c_{00} est dense dans ℓ^∞ ?*
Soit $x = (\xi_j) \in c_0$ et $x_n = (\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, 0, \ldots)$. Évidemment, $x_n \in c_{00}$ et puisque $\|x - x_n\| = \sup_{j>n} |\xi_j|$, le fait que $x \in c_0$ entraîne la convergence de x_n vers x en norme sup. Donc c_{00} est dense dans c_0. Puisque c_0 est un fermé de ℓ_∞, c_{00} ne peut pas être dense dans ℓ_∞ (un autre argument est de montrer que la suite $\mathbf{1} = (1, 1, 1, \ldots)$ ne se laisse pas approcher dans c_{00} puisque $\|\mathbf{1} - x\|_\infty \geq 1$ pour $x \in c_{00}$).

(d) *Est-ce que c_0 est séparable ?* Oui. Pour $y \in c_0$ et un $\varepsilon > 0$ donné il suffit de choisir un élément x de c_0 dont tous les coordonnés sont rationnelles et qui satisfait $\|x - y\|_\infty < \varepsilon/2$. Maintenant la construction des x_n de (c) donne une suite qui, pour n suffisamment large, approche y à ε près en norme. L'ensemble des suites finis rationnelles est donc dense. En plus, il est dénombrable étant une union dénombrable d'ensembles dénombrables :

$$c_{00} \cap \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}^n$$

II) *Soit (X, d) un espace métrique et $\Omega \subseteq X$ une partie* **non dénombrable** *telle que*

$$d(x, y) \geq 1 \text{ pour tout } x, y \in \Omega,\ x \neq y.$$

(a) *Supposons que E est une partie dense dans X. Montrer que pour tout $x, y \in \Omega$, il existe $e_x, e_y \in E$ tels que $d(e_x, e_y) \geq 1/3$.*
Il suffit de choisir pour tout $x \in \Omega$ un $e_x \in E$ tel que $\|x - e_x\| \leq 1/3$. L'assertion écoule de l'inégalité triangulaire !

(b) *En déduire que E n'est pas dénombrable.*
Évidemment, pour $x, y \in \Omega$ on a $e_x \neq e_y$ puisque leur distance est même minoré par 1/3. On observe donc, que

$$\widetilde{E} = \{e_x : \ x \in \Omega\} \subseteq E$$

définit une partie non dénombrable de E, d'où l'assertion.

III)

(a) *Soit $P(\mathbb{N})$ l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{N}$. Montrer que $P(\mathbb{N})$ est non dénombrable (indication : si $\phi : \mathbb{N} \to P(\mathbb{N})$ est une bijection, considérer $A = \{n \in \mathbb{N}, n \notin \phi(n)\}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\phi(n_0) = A$).*
On observe que,par construction de A on a $n_0 \in A$ ssi $n_0 \not{i}nA$ ce qui est contradictoire !

(b) *Pour chaque partie non vide $A \in P(\mathbb{N})$, on définit la suite $(x_A(n))_n$ par*

$$x_A(n) = 1 \text{ si } n \in A \text{ et } x_A(n) = 0 \text{ si } n \notin A.$$

Quelle est la distance dans ℓ^∞ entre x_A et x_B ?
Bien évidemment, $\|x_A - x_B\|_\infty = |A\Delta B|$ où $A\Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$ est la différence symétrique de A et B. En particulier on a $\|x_A - x_B\|_\infty \geq 1$ si $A \neq B$.

(c) *En déduire que ℓ^∞ n'est pas séparable.* L'ensemble $\Omega = P(\mathbb{N})$ est non-dénombrable d'après III (a) qui satisfait les hypothèses de II. Une partie quelconque E qui est dense dans ℓ_∞ ne peut donc pas être dénombrable ce qui veut dire : ℓ_∞ n'est pas séparable.

FIN