	ANNEE UNIVERSITAIRE 2017/2018 SESSION DE PRINTEMPS CODE UE : 4TPM209 Analyse Devoir surveillé terminal Date : 15/05/2018 Heure 14h30 Durée : 3h00 Documents : Non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.	Collège Sciences &Technologies

Exercice 1. [2 points]

(1) Énoncer le théorème de Bolzano–Weierstrass.

(2) Soient f une fonction définie sur l'intervalle $[a, b]$ et $x_0 \in]a, b[$. Donner la définition de f dérivable en x_0.

(3) Énoncer le théorème de Rolle.

(4) Énoncer le théorème de convergence des sommes de Riemann.

Exercice 2. [5 points]

On considère la fonction f définie sur $D = \left[0, \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x + 1} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que f est continue en 0.

(2) Justifier que f est dérivable sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}, +\infty\right[$, calculer sa dérivée et étudier son signe.

(3) Dresser la tableau de variation de f sur D (on pensera à calculer avec justifications les limites en $\frac{1}{e}$ et $+\infty$).

(4) On définit la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ par

$$\begin{cases} x_0 = 2, \\ x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(a) Etudier la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t) = \dfrac{t}{(t+1)^2}$, en déduire que

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{4}.$$

(b) Vérifier d'abord que $x_n \leqslant 1$ pour tout $n \geq 0$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|x_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{4}|x_n - 1|,$$

puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|x_n - 1| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.

(c) En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$.

Tournez s'il vous plaît $\longrightarrow$

Exercice 3. [5 points]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} & \text{si} \quad x \geqslant 0, \\ \\ \sin(x) + \dfrac{x^3}{3} & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que f est continue.

(2) Donner les développements limités de $\sin(x)$ et de $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ à l'ordre 3 au point 0.

(3) En déduire le développement limité de f à l'ordre 3 au point 0.

(4) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f et étudier la position de la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 par rapport à cette tangente.

(5) Montrer que f est de classe C^1.

(6) Montrer que f est bijective de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

(7) On note $h = f_{|[0,+\infty[}$, calculer $\left(h^{-1}\right)' \left(\dfrac{e - e^{-1}}{2}\right)$.

Exercice 4. [3 points]

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(x^2\right)$

(1) En utilisant la formule de Taylor–Lagrange en 0, d'ordre 3 d'une part et d'ordre 5 d'autre part, montrer que pour tout $t \geqslant 0$ nous avons l'encadrement suivant

$$t - \frac{t^3}{3!} \leqslant \sin(t) \leqslant t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}.$$

(2) En déduire un encadrement pour $f(x)$, puis trouver un polynôme $P(x)$ de degré 6 tel que pour $x \in [0, 1]$ on a

$$|f(x) - P(x)| \leqslant \frac{1}{120}.$$

Exercice 5. [3 points]

Calculer en justifiant les limites suivantes

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{(\sin(x))^2}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln\,(1+x) - \sin(x)}{e^x - 1}$.

Exercice 6. [3 points]

Soit $\alpha > 0$, on pose

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + \alpha k^2}.$$

En interprétant la suite ci-dessus comme une somme de Riemann, calculer les limites suivante :

(1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(1)$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.