	ANNEE UNIVERSITAIRE 2019/2020 DST CODE UE : 4TPM209 Analyse Date : 9/06/2020 Corrigé Documents : Autorisés.	
université de BORDEAUX		Collège Sciences &Technologies

Une attention particulière sera portée sur la rédaction. Ne vous limitez pas à donner le résultat final mais indiquez le cas échéant les étapes de calculs et les propriétés utilisées.

Le barème est indicatif.

Exercice 1. [**7 points**] Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3}{5}u_n + \dfrac{2}{5}v_n \\ \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{4}{5}v_n \end{cases}$$

(1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2}{5}(v_n - u_n)$$

Avec la définition des deux suites, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}v_n - (\frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n) \\ &= (\frac{1}{5} - \frac{3}{5})u_n + (\frac{4}{5} - \frac{2}{5})v_n \\ &= \frac{2}{5}(v_n - u_n). \end{aligned}$$

(2) Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n - u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

On note pour tout entier n, $P(n)$: $v_n - u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

$P(0)$ est vrai : $v_0 - u_0 = 1 = \left(\frac{2}{5}\right)^0$.

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vrai alors $P(n+1)$ est vrai.

$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2}{5}(v_n - u_n) = \frac{2}{5} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$ avec $P(n)$. Soit finalement $v_{n+1} - u_{n+1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$. $P(n+1)$ est vrai.

On a montré que $P(0)$ est vrai et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vrai alors $P(n+1)$ est vrai. On peut conclure que $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

(3) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

Commençons par remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{2}{5}\right)^n \geq 0$ et donc $v_n - u_n \geq 0$.

Montrons que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante. Par définition des suites, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n - u_n = \frac{2}{5}(v_n - u_n)$$
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}v_n - v_n = -\frac{1}{5}(v_n - u_n)$$

Avec $v_n - u_n \geq 0$ on obtient donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et $v_{n+1} - v_n \leq 0$. La suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.

$0 \leq \dfrac{2}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$ et donc aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$.

On a (u_n) croissante, (v_n) décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$, les deux suites sont adjacentes. Avec le théorème sur les suites adjacentes, elles convergent et ont la même limite.

(4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = u_n + 2v_n$. Montrer que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est constante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = \left(\frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n\right) + 2\left(\frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}v_n\right) = \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\right)u_n + \left(\frac{2}{5} + \frac{8}{5}\right)v_n = u_n + 2v_n = w_n.$$

La suite (w_n) est constante.

(5) Conclure sur la valeur de la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$ et de la limite de $(v_n)_{n\geq 0}$.

La suite (w_n) est constante donc elle converge vers $w_0 = 0 + 2 \times 1 = 2$. Si on note ℓ la limite commune de (u_n) et (v_n) par opération sur les limites, (w_n) converge vers $\ell + 2\ell = 3\ell$. Par unicité de la limite, $3\ell = 2$ donc $\ell = \dfrac{2}{3}$.

(u_n) et (v_n) convergent vers $\dfrac{2}{3}$.

Exercice 2. [2 points] En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \frac{4x}{(1+x)^5} < 1 - \frac{1}{(1+x)^4} < 4x.$$

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{(1+t)^4}$ et soit $x > 0$ fixé arbitraire.

f est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, avec le théorème des accroissements finis

$$\exists c \in]0, x[, \quad f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0).$$

$f'(t) = \dfrac{-4}{(1+t)^5}$ et pour $c \in]0, x[$, avec la stricte décroissante de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t)^5}$ sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\frac{1}{(1+x)^5} < \frac{1}{(1+c)^5} < \frac{1}{(1+0)^5}.$$

En multipliant par $4x > 0$ on a

$$\frac{4x}{(1+x)^5} < -\frac{-4}{(1+c)^5}x < 4x$$

soit

$$\frac{4x}{(1+x)^5} < -(f(x) - f(0)) < 4x \Leftrightarrow \frac{4x}{(1+x)^5} < 1 - \frac{1}{(1+x)^4} < 4x.$$

Exercice 3. [7 points]

(1) Le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1 + \sin(x)}$ est

$$\sqrt{1+\sin(x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Donner les résultats utilisés et les étapes de calculs pour l'obtenir.

On utilise la composition de deux DL à l'ordre 3 en 0.

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0,$$

et

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\frac{t^2}{2} + \frac{3}{8}\frac{t^3}{6} + t^3\varepsilon_2(t) \text{ avec } \lim_{t\to 0}\varepsilon_2(t) = 0.$$

Ces deux DL étant obtenus en utilisant la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 (les deux fonctions sont 3 fois dérivables au voisinage de 0).

$\sin(0) = 0$, on peut composer et on obtient

$$\sqrt{1+\sin(x)} = 1 + \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6}) - \frac{1}{4}\frac{(x-\frac{x^3}{6})^2}{2} + \frac{3}{8}\frac{(x-\frac{x^3}{6})^3}{6} + x^3\varepsilon_3(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0.$$

Et enfin en tronquant à l'ordre 3, c'est-à-dire en mettant dans le reste tous les monÃ´mes de puissance supérieure ou égale à 4

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\sin(x)} &= 1 + \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6}) - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon(x) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + (-\frac{1}{12} + \frac{1}{16})x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0. \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + x^3\varepsilon(x)\end{aligned}$$

(2) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-1}{x}$.

Pour $x \neq 0$ et voisin de 0, on a avec le DL précédent

$$\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-1}{x} = \frac{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{48}+x^3\varepsilon(x)-1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{8} - \frac{x^2}{48} + x^2\varepsilon(x).$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}(-\frac{x}{8} - \frac{x^2}{48} + x^2\varepsilon(x)) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin(x)}-1}{x} = \frac{1}{2}$.

(3) Justifier que la fonction g définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+\sin(x)}-1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8}x \quad \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est dérivable en 0.

Le plus rapide est de montrer que g admet un DL d'ordre 1 en 0, ce qui est équivalent à la dérivabilité en 0. En effet pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a

$$g(x) - (\frac{1}{2} - \frac{x}{8}) = -\frac{x^2}{48} + x^2\varepsilon(x)$$

et pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0]$ on a

$$g(x) - (\frac{1}{2} - \frac{x}{8}) = 0.$$

En posant

$$\alpha(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{48} + x\varepsilon(x) & \text{si } x \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ 0 \quad \text{si } x \in]-\frac{\pi}{2}, 0] \end{cases}$$

on a pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$g(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{8} + x\alpha(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\alpha(x) = 0.$$

g est dérivable en 0 et $g'(0) = -\frac{1}{8}$.

On pouvait aussi montrer « à la main » que g est continue puis dérivable en 0.

On a, grâce à la question précédente, que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \frac{1}{2}$. De plus $\lim_{x\to 0^-} (\frac{1}{2} - \frac{x}{8}) = \frac{1}{2} = g(0)$. Donc g est continue en 0.

Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\backslash\{0\}$

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \begin{cases} -\frac{1}{8} - \frac{x}{48} + x\varepsilon(x) & \text{si } x \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ -\frac{1}{8} \quad \text{si } x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\end{cases}$$

donc la limite du taux d'accroissement existe et

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = -\frac{1}{8}.$$

On retrouve que g est dérivable en 0 et $g'(0) = -\frac{1}{8}$.

(4) Donner la position de la courbe représentative de g par rapport à sa tangente au voisinage du point de tangence de coordonnées $(0, \frac{1}{2})$.

On sait que g est dérivable en 0, une équation de la tangente est $y = g(0) + g'(0)x$ soit $y = \frac{1}{2} - \frac{x}{8}$. Avec la question précédente on a que

$$g(x) - (\frac{1}{2} - \frac{x}{8}) = \begin{cases} x^2(-\frac{1}{48} + \varepsilon(x)) & \text{si } x \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ 0 \quad \text{si } x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\end{cases}$$

La courbe est confondue avec sa tangente au voisinage du point de tangence de coordonnées $(0, \frac{1}{2})$ pour le points d'abscisse négative.

$\lim_{x\to 0^+} (-\frac{1}{48} + \varepsilon(x)) = -\frac{1}{48} < 0$ et $x^2 > 0$ donc la courbe est en dessous de sa tangente au voisinage du point de tangence de coordonnées $(0, \frac{1}{2})$ pour le points d'abscisse positive.

(5) Expliquer pourquoi la fonction g n'admet pas de développement limité d'ordre 2 en 0.

Par définition, g admet un DL d'ordre 2 en 0 s'il existe une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 telle que

$$g(x) = P(x) + x^2\theta(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \theta(x) = 0. \tag{1}$$

Supposons que P existe et cherchons à obtenir une contradiction.

$$g(x) = P(x) + x^2\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{x}{8} - \frac{x^2}{48} + x^2\varepsilon(x) & \text{si } x > 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{8}x \quad \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

$P(x) = a + bx + cx^2$ avec a, b, c réels à déterminer.

On a alors pour $x > 0$,

$$\frac{(a+bx+cx^2) - (\frac{1}{2} - \frac{x}{8} - \frac{x^2}{48})}{x^2} = \varepsilon(x) - \theta(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

ce qui implique $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{8}$ et $c = -\frac{1}{48}$.

De même pour $x < 0$,

$$\frac{(a+bx+cx^2) - (\frac{1}{2} - \frac{x}{8})}{x^2} = 0 - \theta(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

ce qui implique $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{8}$ et $c = 0 \neq -\frac{1}{48}$.

Il n'existe donc pas de fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 2 tel que (1) soit satisfait.

Exercice 4. [4 points]

(1) En faisant deux intégrations par parties, calculer $\int_0^1 t^2 e^t \, dt$.

Les fonctions $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto e^t$ sont continument dérivables sur $\mathbb{R}$, on a en intégrant par parties

$$\int_0^1 t^2 e^t \, dt = \left[t^2 e^t\right]_0^1 - \int_0^1 (2t) e^t \, dt = e - 2 \int_0^1 t e^t \, dt.$$

Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto e^t$ sont continument dérivables sur $\mathbb{R}$, on a en intégrant par parties

$$\int_0^1 t e^t \, dt = \left[t e^t\right]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^t \, dt = e - \left[e^t\right]_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

Conclusion

$$\int_0^1 t^2 e^t \, dt = e - 2.$$

(2) Détailler un changement de variable qui permet d'obtenir que

$$\int_0^1 t^2 e^t \, dt = \int_1^e (\ln (x))^2 \, dx.$$

On pouvait considérer la fonction f définie sur $[1, e]$ par $f(x) = (\ln (x))^2$ et la fonction φ définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(t) = e^t$. La fonction f est continue sur $[1, e]$, la fonction φ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $[1, e]$ (par croissance de la fonction exponentielle), avec la formule de changement de variable

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} f(x) \, dx = \int_0^1 f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt.$$

Soit

$$\int_1^e (\ln (x))^2 \, dx = \int_0^1 \left(\ln \left(e^t\right)\right)^2 e^t \, dt = \int_0^1 t^2 e^t \, dt.$$

On pouvait aussi considérer la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(t) = t^2 e^t$ et la fonction ψ définie sur $[1, e]$ par $\psi(x) = \ln (x)$. La fonction g est continue sur $[0, 1]$, la fonction ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e]$ et à valeurs dans $[0, 1]$ (par croissance de la fonction logarithme), avec la formule de changement de variable

$$\int_{\psi(1)}^{\psi(e)} g(t) \, dt = \int_1^e g(\psi(x))\psi'(x) \, dx.$$

Soit

$$\int_0^1 t^2 e^t \, dt = \int_1^e (\ln (x))^2 e^{\ln (x)} \frac{1}{x} \, dx = \int_1^e (\ln (x))^2 x \frac{1}{x} \, dx = \int_1^e (\ln (x))^2 \, dx.$$

On remarquera que les fonctions des deux changements de variables possibles sont des bijections réciproques l'une de l'autre.

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\ln \left(\frac{n + k(e-1)}{n}\right)\right)^2$, justifier que la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge et déterminer la limite.

On considère à nouveau la fonction f définie sur $[1, e]$ par $f(x) = (\ln (x))^2$. f est continue sur $[1, e]$, avec le théorème sur les sommes de Riemann on a que

$$R_n = \frac{e-1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\ln \left(1 + (e-1)\frac{k}{n}\right)\right)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_1^e (\ln (x))^2 \, dx.$$

En remarquant que $\dfrac{n+k(e-1)}{n} = 1+(e-1)\dfrac{k}{n}$, on a que $S_n = \dfrac{1}{e-1}R_n$. La suite (S_n) converge et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{e-1}\int_1^e (\ln\,(x))^2\,dx = \frac{e-2}{e-1}.$$

On pouvait aussi considérer la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = (\ln\,(1+(e-1)x))^2$. g est continue sur $[0,1]$, avec le théorème sur les sommes de Riemann on a que

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\,\left(1+(e-1)\frac{k}{n}\right)\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 (\ln\,(1+x(e-1)))^2\,dx.$$

Avec le changement de variable affine $t = 1+(e-1)x$ on a

$$\int_0^1 (\ln\,(1+x(e-1)))^2\,dx = \frac{1}{e-1}\int_1^e (\ln\,(t))^2\,dt.$$

Et le même résultat final.

FIN