# Corrigé du DST 31/05/2021, durée 3h.

**Question et démonstration de cours.**

(1) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires (on ne demande pas de démonstration).

(2) Soit $f$ une fonction dérivable sur l'intervalle $]a,b[$, on suppose qu'elle admet un maximum en $c \in ]a,b[$. On sait qu'alors $f'(c) = 0$, donner la démonstration de ce résultat.

Voir le cours.

**Exercice 1.** On considère les fonctions $f$ et $h$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 + 2x + 1 \quad \text{et} \quad h(x) = -\frac{1}{2}(x^3 + 1).$$

Et la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = h(u_n).$$

(1) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution comprise entre $-\frac{1}{2}$ et 0. On note $\alpha$ cette solution.

$f$ est continue sur $\mathbb{R}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} < 0$ et $f(0) = 1 > 0$. Avec le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 3x^2+2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, la solution de l'équation $f(x) = 0$ est unique.

(2) Montrer que $h\left([-\frac{1}{2}, 0]\right) \subset [-\frac{1}{2}, 0]$.

$h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -\frac{3}{2}x^2 \leq 0$. $h$ est continue et décroissante sur $\mathbb{R}$ donc $h\left([-\frac{1}{2}, 0]\right) = [h(0), h(-\frac{1}{2})] = [-\frac{1}{2}, -\frac{7}{16}] \subset [-\frac{1}{2}, 0]$.

On pouvait aussi travailler de façon algébrique :

$-\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{8} \leq x^3 \leq 0$ puis

$-\frac{1}{8} \leq x^3 \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8} + 1\right) \geq -\frac{1}{2}(x^3 + 1) \geq -\frac{1}{2}(0 + 1)$. Soit à nouveau $-\frac{7}{16} \geq h(x) \geq -\frac{1}{2}$ dès que $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$.

(3) Montrer que

$$\forall x \in [-\frac{1}{2}, 0], \quad \forall y \in [-\frac{1}{2}, 0], \quad |h(x) - h(y)| \leq \frac{3}{8}|x - y|.$$

$h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a vu dans la question précédente que $h'(x) = -\frac{3}{2}x^2$.

Pour tout $c \in ]-\frac{1}{2}, 0[$, $|h'(c)| = \frac{3}{2}c^2$ et $\frac{3}{2}c^2 \leq \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$.

$h$ est continue sur $[-\frac{1}{2}, 0]$ et dérivable sur $]-\frac{1}{2}, 0[$, $|h'|$ est majoré par $\frac{3}{8}$ sur $]-\frac{1}{2}, 0[$ ; avec l'inégalité des accroissements finis on a

$$\forall x \in [-\frac{1}{2}, 0], \quad \forall y \in [-\frac{1}{2}, 0], \quad |h(x) - h(y)| \leq \frac{3}{8}|x - y|.$$

Cette inégalité pouvait aussi être montrée de façon algébrique en remarquant que

$$h(x) - h(y) = -\frac{1}{2}(x^3 - y^3) = -\frac{1}{2}(x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

puis en majorant $|x^2 + xy + y^2|$ par $3 \times \frac{1}{4}$.

(4) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{8}|u_n - \alpha|.$$

*Indication : on pourra utiliser après justification que $h(\alpha) = \alpha$*

Commençons par justifier que $h(\alpha) = \alpha$. Par définition de $\alpha$ dans la question (1), on a $f(\alpha) = 0$. Or

$$f(\alpha) = \alpha^3 + 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -1 - \alpha^3 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}(1 + \alpha^3) = h(\alpha).$$

$u_0 = 0 \in [-\frac{1}{2}, 0]$ qui est un intervalle stable pour $h$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-\frac{1}{2}, 0]$. Dans la question (1) on a vu que $\alpha \in [-\frac{1}{2}, 0]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on applique le résultat de la question (3) à $x = u_n$ et $y = \alpha$

$$|u_{n+1} - \alpha| = |h(u_n) - h(\alpha)| \leq \frac{3}{8}|u_n - \alpha|.$$

(5) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n |\alpha|.$$

On démontre ce résultat par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$P(n) \ : \ |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{8}\right)^n |\alpha|.$$

$|0 - \alpha| = |\alpha| \leq \left(\frac{3}{8}\right)^0 |\alpha|$ donc $P(0)$ est vrai.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vrai, alors avec le résultat de la question (4)

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{8}|u_n - \alpha| \leq \frac{3}{8} \times \left(\frac{3}{8}\right)^n |\alpha| \leq \left(\frac{3}{8}\right)^{n+1} |\alpha|$$

$P(n+1)$ est vrai.

On a montré que $P(0)$ est vrai, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[P(n) \Rightarrow P(n+1)]$ est vrai, donc $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(6) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge et déterminer la limite.

$0 < \frac{3}{8} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ donc la suite $(u_n)_n$ converge vers $\alpha$.

**Exercice 2.** Soit $f$ une fonction définie et $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire, $f$ est 2 fois dérivable et la dérivée seconde de $f$ est continue sur $\mathbb{R}$). On suppose que $f$ s'annule 3 fois, justifier que sa dérivée seconde $f^{(2)}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Notons $a_1$, $a_2$ et $a_3$ les trois points où $f$ s'annule, on peut supposer que $a_1 < a_2 < a_3$. $f$ est continue sur $[a_1, a_2]$ et dérivable sur $]a_1, a_2[$, $f(a_1) = f(a_2) = 0$, avec le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe $b_1 \in ]a_1, a_2[$ tel que $f'(b_1) = 0$.

De même $f$ est continue sur $[a_2, a_3]$ et dérivable sur $]a_2, a_3[$, $f(a_2) = f(a_3) = 0$, avec le théorème de Rolle, il existe $b_2 \in ]a_2, a_3[$ tel que $f'(b_2) = 0$.

On a $f'(b_1) = f'(b_2) = 0$ avec $b_1 < a_2 < b_2$, on applique à nouveau le théorème de Rolle à $f'$ qui est continue sur $[b_1, b_2]$ et dérivable sur $]b_1, b_2[$. Il existe $c \in ]b_1, b_2[$ tel que $f^{(2)}(c) = (f')'(c) = 0$.

La dérivée seconde de $f$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 3.**

(1) Ecrire la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 1 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0.

$f$ est $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et $f^{(2)}(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

Pour tout $x > -1$, il existe $c_x$ compris entre 0 et $x$ tel que

$$\ln(1+x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(c_x)}{2!}x^2 = x - \frac{1}{2(1+c_x)^2}x^2.$$

(2) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \geq x - \dfrac{x^2}{2}$.

L'inégalité est immédiate pour $x = 0$ et pour $x > 0$ on a $0 < c_x < x$ dans la formule de Taylor Lagrange. Pour tout $c > 0$, $-2(1+c)^2 < -2 < 0$ et donc avec la décroissance de la fonction inverse sur $]-\infty, 0[$ on a $-\dfrac{1}{2(1+c)^2} > -\dfrac{1}{2}$.

On en déduit que

$$\forall x > 0, \quad \ln(1+x) = x - \frac{1}{2(1+c_x)^2}x^2 > x - \frac{1}{2}x^2.$$

**Exercice 4.** On rappelle que le développement limité d'ordre 4 en 0 de $t \mapsto e^t$ est

$$e^t = \sum_{k=0}^{4} \frac{t^k}{k!} + t^4\varepsilon(t) \quad \text{avec } \lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0.$$

(1) En déduire le développement limité d'ordre 4 en 0 de $x \mapsto e^x + e^{-x}$.

En remplaçant $t$ par $-x$ (lorsque $x$ tend vers 0, $-x$ aussi)

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(-x)$$

puis en sommant deux DL du même ordre en 0

$$e^x + e^{-x} = 2 + x^2 + \frac{x^4}{12} + x^4\varepsilon_1(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0.$$

(2) Donner le développement limité d'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \cos(x)$.

Ce DL fait partie des DL de référence et que l'on peut retrouver à l'aide de la formule de Taylor-Young à l'ordre 4.

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_2(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0.$$

(3) On note $h(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos(x)$. Justifier que la courbe représentative de $h$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0. Déterminer la position locale de la courbe par rapport à la tangente.

En sommant les DL on obtient

$$h(x) = 4 + \frac{x^4}{6} + x^4\varepsilon_3(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0.$$

En calculant directement $h'(0)$ ou plus rapidement ici, en remarquant que la partie principale du DL à l'ordre 1 est 4 on a $h'(0) = 0$. La courbe représentative de $h$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0. De plus de $h(x) - 4 = x^4(\dfrac{1}{6} + \varepsilon_3(x))$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0$ on déduit que $h(x) - 4$ est du signe de $x^4/6$ au voisinage de 0, soit de signe positif.

Au voisinage du point d'abscisse 0 la courbe est au dessus de la tangente.

(4) Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\cos(x)-1}$.
Avec les DL précédents on a

$$e^x+e^{-x}-2 = x^2+\frac{x^4}{12}+x^4\varepsilon_1(x) \text{ et } \cos(x)-1 = -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+x^4\varepsilon_2(x)$$

avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$. On peut travailler directement avec ces DL ou ne garder que les DL d'ordre 2 puisque le coefficient de $x^2$ est non nul dans le DL de $\cos(x)-1$.

$$\frac{e^x+e^{-x}-2}{\cos(x)-1} = \frac{x^2+x^2\varepsilon_3(x)}{-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon_4(x)} = \frac{1+\varepsilon_3(x)}{-\frac{1}{2}+\varepsilon_4(x)}$$

avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = \lim_{x\to 0}\varepsilon_4(x) = 0$.
On en déduit que $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{\cos(x)-1} = \dfrac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$.

**Exercice 5.** On note $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2\sin(x)\,dx$.

(1) En faisant 2 intégrations par parties successives, calculer $I$.
Les fonctions $x\mapsto x^2$ et $x\mapsto -\cos(x)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, d'où

$$\begin{array}{ll} f(x) = x^2 & f'(x) = 2x \\ g'(x) = \sin(x) & g(x) = -\cos(x) \end{array}$$

$I = \Big[-\cos(x)x^2\Big]_0^{\pi/2} - \displaystyle\int_0^{\pi/2} 2x(-\cos(x))\,dx = 2\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx$
Les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto \sin(x)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, d'où

$$\begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \cos(x) & g(x) = \sin(x) \end{array}$$

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos(x)\,dx = [x\sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\sin(x)\,dx = \frac{\pi}{2} - [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}-1.$
Conclusion : $I = \pi - 2$.

(2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $S_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^n k^2\sin\left(\frac{k}{n}\frac{\pi}{2}\right)$. Montrer que la suite $(S_n)_n$ converge et calculer la limite.
*Remarque : on pourra exprimer la limite en fonction de $I$ si la première question n'a pas été traitée.*
$x\mapsto x^2\sin(x)$ est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, avec le théorème des sommes de Riemann on a

$$I = \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-0}{n}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\left(\frac{k}{n}\frac{\pi}{2}\right).$$

Or $\dfrac{\frac{\pi}{2}-0}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\left(\frac{k}{n}\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2\sin\left(\frac{k}{n}\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 S_n$ donc par opération sur les limites, la suite $(S_n)_n$ converge vers $\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^3 I = \dfrac{8(\pi-2)}{\pi^3}$.
On pouvait aussi utiliser la fonction $x\mapsto x^2\sin(\frac{\pi}{2}x)$ qui est continue sur $[0,1]$, avec le théorème des sommes de Riemann on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\left(\frac{k}{n}\right)^2\sin\left(\frac{k}{n}\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^1 x^2\sin(\frac{\pi}{2}x)\,dx.$$

Puis avec le changement de variable $t = \frac{\pi}{2}x$

$$\int_0^1 x^2 \sin(\frac{\pi}{2}x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{\pi}t\right)^2 \sin(t)\, \frac{2}{\pi}dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 I.$$

**Exercice 6.**

(1) En remarquant que $\frac{t^3}{1+t^2} = t - \frac{t}{1+t^2}$, calculer $J = \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}\, dt$.

$$J = \int_0^1 \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right) dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\, |1+t^2|\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\, (2).$$

(2) Donner le domaine $\mathcal{D}$ de définition et dérivabilité de la fonction tan puis vérifier que

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x).$$

La fonction $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est définie et dérivable sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\, ,\, k \in \mathbb{Z}\}$. Et

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad (\tan)'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\sin^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = \tan^2(x) + 1.$$

(3) A l'aide du changement de variable $t = \tan(x)$, calculer

$$\int_0^{\pi/4} \tan^3(x)\, dx.$$

*Remarque : on pourra exprimer le résultat en fonction de $J$ si la première question n'a pas été traitée.*

De façon « mécanique » : pour $x = 0$, $t = \tan(0) = 0$ ; pour $x = \frac{\pi}{4}$, $t = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ ; $dt = \tan'(x)dx = (1+\tan^2(x))dx = (1+t^2)dx$ soit $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$ ; puis on remplace.

En faisant bien apparaitre les fonctions utilisées : on note $f(t) = \frac{t^3}{1+t^2}$, $f$ est continue sur $[0,1]$ ; la fonction tan est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et à valeurs dans $[0,1]$. Avec le théorème de changement de variables

$$J = \int_{\tan(0)}^{\tan(\frac{\pi}{4})} f(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan(x))\tan'(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^3(x)}{1+\tan^2(x)}(1+\tan^2(x))\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3(x)\, dx.$$

(4) On définit sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ la fonction $g$ par

$$g(x) = \frac{\tan^2(x)}{2} + \ln\, (\cos(x))\, .$$

Calculer la dérivée de $g$ puis retrouver sans changement de variable la valeur de $\int_0^{\pi/4} \tan^3(x)\, dx$.

Pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) > 0$, la fonction $g$ est dérivable comme composée et somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$g'(x) = \tan(x)(1+\tan^2(x)) + \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x) + \tan^3(x) - \tan(x) = \tan^3(x).$$

La fonction $g$ est une primitive de $x \mapsto \tan^3(x)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3(x)\,dx = g\left(\frac{\pi}{4}\right) - g(0) = \frac{\tan^2(\frac{\pi}{4})}{2} + \ln\,\left(\cos(\frac{\pi}{4})\right) - (0 + \ln\,(1)) = \frac{1}{2} + \ln\,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln\,(2).$$