DUAL ET PRÉDUAL D'UN ESPACE DE BANACH

par

Gautier Hanna & Thomas Viscarro

Résumé. — Soit un espace de Banach, on définit son dual comme l'espace de ses formes linéaires continues. On peut souvent identifier cet espace à un espace plus connu. Par exemple le dual de l'espace ℓ^p s'identifie avec l'espace ℓ^q avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $(p, q > 1)$.

Etant donné que le dual d'un espace de Banach en est un lui même, il vient une question naturelle : soit un espace de Banach quelconque donné, a-t-il une chance d'être, à isomorphisme près, le dual d'un autre ? Cette étude est l'objet de ce TER et on verra comment certains théorèmes connus tel Banach Alaoglu, ou Krein Milman peuvent être mis en application pour répondre à cette question. Bien évidemment nous aurons rappelé auparavant leurs contextes, énoncés et démonstrations.

Nous tenons à remercier Bernhard HAAK, pour sa patience, ses conseils, et son aide.

1. Le théorème de Banach Alaoglu

1.1. Les topologies faibles et faibles étoiles. — On considère un espace de Banach E. Soit $f \in E'$, et on désigne par $\phi_f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\phi_f(x) = \langle f, x \rangle$ (il s'agit en fait de f.) On rappelle les définitions des topologies dites faibles et faibles*

Définition 1.1. — La topologie faible, notée $\sigma(E, E')$, sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications ϕ_f, pour tout $f \in E'$, où $\phi_f : E \to \mathbb{R}$ et $\phi_f(x) = \langle f, x \rangle$.

Définition 1.2. — La topologie faible*, notée $\sigma(E', E)$, est la topologie la moins fine sur E' rendant toutes les applications δ_x continues, pour tout $x \in E$, où $\delta_x : E' \to \mathbb{R}$ et $\delta_x(f) = \langle f, x \rangle$.

Remarque 1.3. — Il existe une injection canonique qui est une isométrie qui permet d'identifier E comme un sous espace de E". Cette isométrie est donnée par $i : E \to E''$ telle que $\langle i(x), f \rangle_{E'',E'} = \langle f, x \rangle_{E',E}$, pour tout $x \in E$, et pour tout $f \in E'$. En effet, à $X \in E$ fixé, l'application de E' dans $\mathbb{R}$ $f \mapsto \langle f, x \rangle$ est une forme linéaire continue sur E'.

Définition 1.4. — Soit Y_i une famille d'espaces topologiques et soit $\phi_i : X \to Y_i, \forall i \in I$ une famille d'applications sur un espace X. On définit la topologie initiale associée à ce système comme la topologie la moins fine rendant les applications $\phi_i : X \to Y_i$ continues pour tout $i \in I$.

A présent regardons un certain nombre de résultats liés à ces différentes topologies qui seront utilisés dans la démonstration du théorème de Banach Alaoglu :

Proposition 1.5. — *Soit Z un espace topologique et soit f une application de Z dans X, où X est la topologie initiale associée aux applications $f_i : X \to Y_i, \forall i \in I$ alors : f est continue si et seulement si $f_i \circ f$ est continue de Z dans Y_i pour chaque $i \in I$.*

Démonstration. — Si ψ est continue, alors $\phi_i \circ \psi$ est aussi continue pour chaque $i \in I$, par définition de la topologie initiale X.
Inversement, soit U un ouvert de X, montrons que $\psi^{-1}(U)$ est un ouvert de Z. On considère un espace $J \subset I$ fini, où U est de la forme :

$$U = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} \phi_i^{-1}(\mathcal{O}_i)$$

avec $\mathcal{O}_i$ ouvert de Y_i. Par conséquent,

$$\psi^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J}\psi^{-1}(\phi_i^{-1}(\mathcal{O}_i)) = \bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J}(\phi_i\circ\psi)^{-1}(\mathcal{O}_i)$$

qui est un ouvert de Z, comme image réciproque de fonction continue. □

Ici un résultat intéressant bien qu'inutile pour la preuve du théorème nous concernant.

Lemme 1.6. — *Soient X un espace vectoriel et $\phi, \phi_1, ..., \phi_n$ des fonctions linéaires sur X vérifiant :*

$$\phi_i(v) = 0, \forall i = 1, 2, ..., n \Rightarrow \phi(v) = 0$$

Alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\phi = \sum_{i=1}^n \lambda_i\phi_i$.

Démonstration. — On considère l'application $F : X \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par :

$$F(u) = [\phi(u), \phi_1(u), ..., \phi_n(u)]$$

Il est clair que le vecteur $a = (1, 0, ..., 0)$ n'est pas un élément de $Im(F)$. par le théorème de Hahn-Banach, on peut donc séparer strictement $\{a\}$ et $Im(F)$ par un hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$, il existe donc $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lambda_0 < \alpha < \lambda_0.\phi(u) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\phi_i(u), \forall u \in X$$

Par linéarité on en conclut que

$$\lambda_0.\phi(u) + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\phi_i(u) = 0, \forall u \in X \text{ et } \lambda_0 \neq 0$$

□

Proposition 1.7. — *Soit $\psi : E' \to \mathbb{R}$ une application linéaire et continue pour la topologie faible*, $\sigma(E', E)$. Alors il existe $x \in E$ tel que :*

$$\psi(f) = \langle f, x\rangle, \forall f \in E'.$$

Démonstration. — Comme ψ est continue pour la topologie faible, il existe un voisinage $V \subset E'$ de 0, pour la topologie faible*, tel que

$$|\psi(f)| < 1, \forall f \in V$$

On peut supposer V de la forme

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} \phi_i^{-1}\left(]x_i - \epsilon; x_i + \epsilon[\right)$$

avec $x_i \in E$ et $\epsilon > 0$. En particulier, si on suppose que :

$$\forall i = 1, ..., n, \langle f, x_i \rangle = 0$$

Alors $\lambda f \in V, \forall \lambda$. Par conséquent :

$$|\psi(\lambda f)| = |\lambda| . |\psi(f)| < 1, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Il s'en suit que : $\psi(f) = 0$ On peut donc appliquer le Lemme 1.6 et on voit que :

$$\psi(f) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle f, x_i \rangle = \langle f, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \rangle, \forall f \in E'$$

□

***Lemme 1.8* (Théorème de Tychonoff).** — *Un produit d'espaces topologiques non vides est compact si et seulement si tous les facteurs sont compacts.*

Le résultat n'est pas ici démontré.

1.2. Le Théorème de Banach-Alaoglu. —

***Théorème 1.9*.** — *L'espace* $B_{E'} = \{f \in E' : \|f\| \leq 1\}$ *est compact pour la topologie faible*.*

Démonstration. — On considère l'espace $Y = \mathbb{R}^E$, et on désigne les éléments de Y par $y = (y_x)_{x \in E}$ où les $y_x \in \mathbb{R}$. Y est muni de la topologie produit (c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant les applications $p_x : \mathbb{R}^E \to \mathbb{R}$ continues où $p_x(y) = y_x$).
On considère maintenant l'application $\phi : E' \to Y$ tel que

$$\phi(f) = (\delta_x(f))_{x \in E}$$

L'application ϕ ainsi définie est une application continue. En effet, il suffit d'utiliser la Proposition 1.5, car à x fixé dans E, $p_x \circ \phi$ est continue pour la topologie faible*.
Montrons que ϕ est un homéomorphisme de E' sur $\phi(E')$:

- ϕ est injective, en effet si on prend deux éléments f_1 et f_2 de E', tels que $f_1 \neq f_2$, alors il existe $x_0 \in E$ tel que
$$f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$$
c'est-à-dire
$$\delta_{x_0}(f_1) \neq \delta_{x_0}(f_2)$$
et donc on a
$$(\delta_x(f_1))_{x\in E} \neq (\delta_x(f_2))_{x\in E}$$
- ϕ^{-1} est continue : il suffit de montrer que $\delta_x \circ \phi^{-1}$ est continue, pour tout $x \in E$. On remarque que $y_x = \delta_x(\phi^{-1}(y)) = p_x(y)$ qui est continue.

Par homéomorphisme, pour que $B_{E'}$ soit compact, il suffit de voir que $K = \phi\left(B_{E'}\right)$ est compact. Pour ceci remarquons que K est :
$$\{y \in Y : |y_x| \leq \|x\|, y_{z+x} = y_x + y_z, y_{\lambda x} = \lambda y_x, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } (x, z) \in E^2\}$$
Ce qui permet de voir que $K = K_1 \cap K_2$, avec :
$$K_1 = \{y \in Y : |y_x| \leq \|x\|, \forall x \in E\}$$
Et
$$K_2 = \left\{y \in Y : y_{z+x} = y_x + y_z, y_{\lambda x} = \lambda y_x, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } (x, z) \in E^2\right\}$$
Il est clair que $K_1 = \prod[-\|x\|, \|x\|]$ est un produit de compacts de $\mathbb{R}$, donc compact, par le Théorème de Tychonoff (Lemme 1.8). De plus, les applications
$$h : y \to y_{z+x} - y_x - y_z$$
et
$$g : y \to y_{\lambda x} - \lambda y_x$$
sont continues, ce qui montre que l'espace
$$K_2 = g^{-1}(\{0\}) \cap h^{-1}(\{0\})$$
est un fermé.

Par conséquent, K est un fermé dans K_1, donc compact. Donc $B_{E'}$ est compact. $\square$

2. Le théorème de Krein Milman

2.1. Points extrémaux. —

***Définition 2.1* (Point extrémal).** — Soit A un espace, un point x de A est dit extrémal si il ne saurait être dans un segment de deux points de A ; ce qui analytiquement s'énonce comme suit :

$$\forall (a,b) \in A,\ \forall t \in [0,1], x = at + b(1-t) \Rightarrow x = a \text{ ou } x = b$$

Il vient automatiquement la notion d'espace extrémal que l'on formule ainsi :

***Définition 2.2* (Espace extrémal).** — Un espace S de K est dit extrémal si

$$x \in K, y \in K, 0<t<1, (1-t)x + ty \in S \Rightarrow x \in S \text{ et } y \in S$$

Remarque 2.3. — Pour montrer qu'un point d'un espace K n'est pas extrémal, il suffit d'exhiber deux points de cet espace dont x est sur le segment. En particulier toute partie de l'intérieur d'un espace convexe n'a aucune chance d'être extrémale.

On notera dorénavant ext(K) l'espace des points extrémaux de K. Soit $B(A) := \{x \in E : ||x|| < 1\}$la boule unité ouverte de E, alors on a

Proposition 2.4. — *Si A est un espace possédant une norme strictement convexe : ext$(B(A)) = \partial B(A)$ où $\partial B(A)$ désigne le bord de la boule unité.*
En particulier ceci marche pour les espaces de Hilbert ainsi que pour les espaces ℓ^p et $\mathcal{L}^p$ avec $1 < p < \infty$

Démonstration. — La remarque 2.3 nous permet de dire que

$$\text{ext}(B(\text{A})) \subset \partial(B(\text{A}))$$

On rappelle qu'une norme est strictement convexe si :

$$\|x\| = \|y\| = 1 \text{ et } x \neq y \text{ impliquent } \|\tfrac{x+y}{2}\| < 1.$$

Montrons donc l'inclusion réciproque dans ce cas ci. On va en fait montrer que le bord de la boule est extrémal, ce qui montrera bien l'implication réciproque.

Soient donc x et $y \in B(\text{A})$ tels que $\forall 0 < t < 1$:

$$tx + (1-t)y \in \partial(B(A)), \text{ c'est à dire } : ||tx + (1-t)y|| = 1.$$

En particulier (t=$\frac{1}{2}$) : $||\frac{x+y}{2}|| = 1$. Il vient x = y ou $||x|| \neq 1$ (par exemple). Mais : $x = y \Rightarrow ||\frac{y+y}{2}|| = ||y|| = 1 \Rightarrow y \in \partial(B(\mathrm{A}))$ ce qui reviendrait à dire que $\partial(B(\mathrm{A}))$ est extrémale.

Supposons donc que $||x|| \neq 1$ c'est-à-dire : $||x|| < 1$ (car $x \in B(\mathrm{A})$) alors on a

$$1 = ||\frac{x+y}{2}|| \leqslant ||\frac{x}{2}|| + ||\frac{y}{2}|| < \frac{1}{2} + ||\frac{y}{2}||$$
$$\Rightarrow \frac{||y||}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow ||y|| > 1$$

ce qui revient à dire que $y \notin B(\mathrm{A})$ ce qui est absurde. □

En revanche un résultat qui sera plus intéressant pour la suite :

Proposition 2.5. — *L'espace extrémal de $B(c_0, ||.||_\infty)$ est l'espace vide.*

Démonstration. — On rappelle qu'on a toujours

$$ext(B(\mathrm{A})) \subset \{(x_n) \in \overline{B(\mathrm{A})} \text{ tel que } \exists k : |x_k| = 1\}.$$

Montrons qu'un tel élément ne saurait être extrémal.
Comme x = $(x_n) \in c_0, \exists$ i $\in \mathbb{N}$ tel que $|x_i| < 1$. Soit alors $\alpha > 0$ tel que $(|x_i| + \alpha) < 1$. On a alors $x_i + \alpha$ et $x_i - \alpha$ plus petits que 1 et plus grands que -1. On pose y = (y_k) tel que ($y_j = x_j$ $\forall j \neq i$ et $y_i = x_i + \alpha$), on définit aussi z = (z_k) tel que ($z_j = x_j$ $\forall j \neq i$ et $z_i = x_i - \alpha$). On a alors y et z appartiennent à $\partial(B(C_0))$ et de plus $\frac{z+y}{2}$ = x. Par la remarque 2.3 , x ne saurait être extrémal et l'assertion est ainsi démontrée. □

2.2. Théorème de Krein Milman.

— On conserve ici les notations introduites dans la partie précédente.

Théorème 2.6 **(Krein Milman).** — *Soit K un sous espace de X qui est à la fois compact, convexe et non vide. Alors K est l'enveloppe convexe fermée de ses points extrémaux.* ($K = \overline{co(ext(K))}$)

Pour démontrer ceci on utilisera les deux résultats suivants :

Lemme 2.7. — *Soit $\mathcal{P}$ la famille de tous les espaces extrémaux compacts de K, K vérifiant les conditions du théorème. Alors :*

1. *l'intersection de toute famille de $\mathcal{P}$ est soit vide, soit un élément de $\mathcal{P}$*
2. *soit $\mathcal{S} \in \mathcal{P}, \mathcal{T} \in X'$ et μ le maximum de $Re(\mathcal{T})$ sur $\mathcal{S}$; on note $\mathcal{S}_\mathcal{T} = \{x \in \mathcal{S} : Re(\mathcal{T}x) = \mu\}$. On a $\mathcal{S}_\mathcal{T} \in \mathcal{P}$*

Démonstration du Lemme. — On a évidemment $\mathcal{P} \neq \varnothing$ puisque K $\in \mathcal{P}$

Une intersection de compacts est un compact, montrons donc qu'une intersection d'espace extrémal est extrémal. Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux espaces extrémaux, ce qui revient à dire que si

$$\forall t \in]0,1[,\ tx + (1-t)y \in \mathcal{A} \text{ alors } x \in \mathcal{A} \text{ et } y \in \mathcal{A}$$

Comme on a la même chose pour $\mathcal{B}$, il devient évident qu'en prenant l'intersection la condition est encore vérifiée. Ce qui démontre le point (1).

Soit à présent $x \in K$ et $y \in K$ tels que $tx + (1-t)y = z \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ On a alors en particulier $z \in \mathcal{S}$ qui est un élément de $\mathcal{P}$ donc extrémal, donc x et y sont dans $\mathcal{S}$. On a donc $Re(\mathcal{T}x) \leqslant \mu$ et pareil pour y. Et par le même raisonnement que pour la proposition 2.4 et en utilisant le fait que $\mathcal{T}$ est linéaire, on a $Re(\mathcal{T}x) = \mu$ et $Re(\mathcal{T}y) = \mu$, ce qui revient à dire que $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ et $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}$. C'est à dire que $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ est extrémal. Ce qui démontre le point (2). □

Démonstration du Théorème. — On conserve les notations du lemme. Soit $\mathcal{S} \in \mathcal{P}$. Montrons qu'il possède un élément minimal et que celui ci est extrémal (1). On pose

$$\mathfrak{M} = \{M \in \mathcal{P} \text{ tels que } M \in \mathcal{S}\}.$$

Pour $\mathfrak{M}_0 \in \mathfrak{M}$, $M_0 = \bigcap_{M \in \mathfrak{M}_0} M$ est un fermé, donc compact, et non vide de $\mathfrak{M}_0$. On peut donc y appliquer le lemme de Zorn, qui affirme que l'espace $\mathfrak{M}$ admet un élément minimal, cet élément en particulier est donc un point extrémal et est dans $\mathcal{S}$. Prouvons plus en détail un point du raisonnement :

L'espace minimal de $\mathfrak{M}$ est réduit à un élément : notons le M. Par sa minimalité, si S est dans M, il ne saurait être dans $\mathcal{P}$. En effet, sinon il serait alors compact extrémal et inclus dans un espace lui même inclus dans $\mathcal{S}$, donc il serait à la fois dans $\mathcal{P}$ et dans $\mathcal{S}$, ce qui contredit la minimalité de M. Ceci marche en particulier pour $M_{\mathcal{T}}$ et il vient que tout $\mathcal{T} \in X'$ est constante. Mais comme X' sépare les points, M est réduit à un élément.

A présent : comme ext(K) $\subset$ K, et que K est convexe par hypothèse : co(ext(K)) $\subset K \Rightarrow \overline{co(ext(K))} \subset \overline{K} = K$ (K est compact, donc fermé).

On a donc $\overline{co(ext(K))}$ compacte.
Montrons l'autre inclusion par l'absurde. Soit donc $x_0 \in K$ tel que $x_0 \notin \overline{co(ext(K))}$. Par le théorème de Hahn-Banach, comme $\{x_0\}$ est un fermé, il existe un $u \in X'$ tel que $Re(ux) < Re(ux_0)$, et ce quelque soit x dans $\overline{co(ext(K))}$. On prend alors K_u (le K est ici le $\mathcal{S}$, et u est ici le $\mathcal{T}$ du lemme 2.7, deuxième point). Mais alors K_u et $\overline{co(ext(K))}$ ne s'intersectent pas ; ce qui contredit le (1) du théorème. □

3. C_0 n'est le dual d'aucun espace

En effet : si C_0 possédait un prédual, selon le théorème de Banach-Alaoglu, sa boule unité serait compacte pour la topologie faible étoile. Ainsi selon le théorème de Krein Milman elle serait l'adhérence de l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. Or on a vu que cette enveloppe convexe est le vide (Proposition 2.5). On aurait donc que la boule unité de C_0 serait le vide, ce qui est absurde ; cet espace contenant toujours 0.

4. Un résultat de Sten Kaijser

4.1. Un critère de prédualité. — Le but est ici d'avoir un critère permettant d'affirmer qu'un espace est le dual d'un autre. Ce critère est un critère suffisant.

Lemme 4.1 **(Théorème de Goldstine).** — *Soit X un espace vectoriel normé, alors la boule unité fermée de X'' est l'adhérence, pour la topologie faible* $\sigma(X'', X')$, *de* $i(B_X)$ *où* $i : X \to X''$ *tel que* $i(x) = \delta_x$

Théorème 4.2 **(Théorème de Sten Kaijser).** — *Soit X un espace de Banach, et soit E un espace de fonctions linéaires sur X tel que :*
– *E sépare les points de X.*
– $\overline{B_X(0,1)}$ *est compact pour la topologie faible donnée par l'espace E.*
Alors X est un espace dual et le pré-dual de X est $\overline{Vect(E)}$

On note ici que le principal intérêt du théorème est qu'il donne le prédual de l'espace.

Démonstration. — Remarquons que par la deuxième hypothèse l'image de la boule d'unité $\overline{B_X(0,1)}$ par toute fonction $f \in E$ est borné. Il en suit que $E \subset X'$. Soit $F = \overline{Vect(E)}^{X'}$, alors F est un sous espace vectoriel fermé de X'. Considérons maintenant le plongement $S : F \to X'$.

Observons que S' (l'adjoint de S) est la restriction à F. En effet, soit $R : X'' \to F'$ tel que $Rx'' = x''_{|F}$, R est linéaire et continue, et on a :

$$\langle Sx', x'' \rangle = x''(Sx') = x''(x') = x''_{|F}(x') = \langle x', Rx'' \rangle.$$

Donc $S' = R$.
Par le théorème de Hahn-Banach, il vient que S' est surjectif : Toute fonctionnelle $f' \in F'$ peut se prolonger en une fonctionnelle $x'' \in X''$ tel que $x''_{|F} = f'$. Il est clair que, comme $F \subset X'$, alors $x''_{|F} : F \to \mathbb{R}$, et ceci est une isométrie ($\|x''\|_{X''} = \|f'\|_{F'}$).
Le but de cette démonstration est de montrer que $T : X \to F'$, où $T = S' \circ i$, est une isométrie bijective, i étant l'injection naturelle introduite dans la remarque 1.3
Montrons que T est surjectif : Soit $f' \in B_{F'}(0,1)$ et soit $x'' \in B_{X''}(0,1)$ un représentant de f' dans X''(tel que $x''_{|F} = f'$), alors, par le Théorème de Goldstine (Lemme 4.1), il existe $(x_n) \subset \overline{B_X(0,1)}$ tel que :

$$\langle x_n, x' \rangle \to \langle x'', x' \rangle, \text{ pour tout } x' \in X'.$$

Or les topologies faibles $\sigma(X, E')$ et $\sigma(X, F)$ coïncident sur $\overline{B_X(0,1)}$, où $E' = Vect(E)$, en effet :

- $x_n \to x$ dans $\sigma(X, F)$ si pour tout $\phi \in F$, $\phi(x_n - x) \to 0$. Comme $E' = Vect(E) \subset F$ alors pour tout $\phi \in E'$, on a $\phi(x_n - x) \to 0$. Et donc on a $x_n \to x$ dans $\sigma(X, E')$.
- Inversement, montrons que si $x_n \to x$ dans $\sigma(X, E')$, alors $x_n \to x$ dans $\sigma(X, F)$. Si $\phi \in F$, alors il existe une suite $(\phi_n) \subset E'$ telle que $\|\phi - \phi_n\|_{X'} \to 0$. Soit $x_n \to x$ dans $\sigma(X, E')$, alors :

  $$\phi(x_n - x) = (\phi - \phi_k)(x_n - x) + \phi_k(x_n - x)$$

  D'où

  $$|\phi(x_n - x)| \leq |(\phi - \phi_k)(x_n - x)| + |\phi_k(x_n - x)|$$

  Comme on a convergence faible, alors $||x_n - x||$ est bornée (disons par une constante $M > 0$), et :

  $$|\phi(x_n - x)| \leq ||(\phi - \phi_k)||.M + |\phi_k(x_n - x)|$$

  De plus, comme $\|\phi - \phi_n\|_{X'} \to 0$, alors il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k > K$:

  $$\|\phi - \phi_k\|_{X'} \leq \frac{\epsilon}{2M}$$

Alors

$$|\phi(x_n - x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + |\phi_k(x_n - x)|$$

Et donc, à k fixé, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, $|\phi_k(x_n - x)| < \frac{\epsilon}{2}$, et on en déduit que

$$|\phi(x_n - x)| \leq \epsilon$$

Donc $x_n \to x$ dans $\sigma(X', F)$.

Comme les topologies faibles $\sigma(X, E')$ et $\sigma(X, F)$ coïncident sur $\overline{B_X(0,1)}$, alors $\overline{B_X(0,1)}$ est compact, pour la topologie $\sigma(X, F)$. Il existe donc une sous suite (x_{n_k}) de (x_n) convergente vers $x_0 \in \overline{B_X(0,1)}$. Donc pour tout $f' \in F'$,

$$\langle x_0, f' \rangle = \langle x'', f' \rangle$$

Donc $x'' = \delta_x = i(x)$, par conséquent T est surjectif.

Montrons maintenant que T est injectif : Soit $Tx = 0$ donc, par définition de T

$$(S' \circ i)(x) = S'(\delta_x) = 0.$$

Donc :

$$\forall \phi \in F, \text{ on a } \langle (\delta_x)_{|F}, \phi \rangle = 0$$

Comme $E \subset F$, on a :

$$\forall \phi \in E, \text{ on a } \phi(x) = 0$$

De plus, comme l'espace E sépare les points de X,

$$x = 0$$

(En effet, si $x \neq 0$, alors $\exists\ \phi \in E$ telle que $\phi(x) \neq 0$)

Montrons enfin que T est une isométrie : Il est clair que i et S' sont des isométries, donc T est une isométrie par composition d'isométries.

Finalement, on a bien :

$$X \simeq F'$$

□

Remarque 4.3. — Comme $F = \overline{Vect(E)} \subset X'$, alors

$$\|f\|_F = \|f\|_{X'} = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x, f \rangle|$$

Définition 4.4. — On dit que A est un convexe équilibré si :

$$\forall |t| \leq 1, \text{ et } \forall x \in A, \text{ on a } t.x \in A$$

Corollaire 4.5. — *Soit K un compact convexe équilibré dans un espace X localement convexe, et soit*

$$X_K = \{x \in X : \exists t > 0 \text{ tel que } t.x \in K\}$$

Alors X_K est un espace de Banach avec boule unité K et X_K est un espace dual.
De plus, X'_K est l'adhérence de X' pour la norme donnée par la dualité avec X_K.

Démonstration. — L'espace X_K est un espace vectoriel :

- Soient $x \in X_K$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\lambda.x \in X_K$ (prendre $t' = \frac{t}{\lambda}$).
- Soient maintenant $x \in X_K$ et $y \in X_K$, alors il existe $t_x > 0$ et $t_y > 0$ tel que $t_x.x$ et $t_y.y$ sont dans K. De plus, si on prend $t = \min\{t_x, t_y\}$, alors :
$$t.x \in K \text{ et } t.y \in K$$
Comme K est convexe :
$$\frac{tx+ty}{2} = \frac{t}{2}(x+y) \in K$$
Et donc on a bien :
$$(x+y) \in X_K$$

De plus, il s'agit d'un espace vectoriel normé : On considère

$$\|x\| = \inf\{\alpha : \frac{x}{\alpha} \in K\}$$

Il s'agit bien d'une norme :

- Soient $x \in X_K$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\|\lambda.x\| = \inf\{\alpha \times \frac{\lambda}{\lambda} : \frac{\lambda.x}{\alpha} \in K\}$, donc $\|\lambda.x\| = \inf\{\frac{\alpha}{\lambda} : \frac{\lambda.x}{\alpha} \in K\} \times \lambda = \lambda.\|x\|$
Maintenant si $\lambda \in \mathbb{R}_-^*$, on a
$$\|x\| = \|-x\| \text{ (car } K \text{ est équilibré)}$$
Donc :
$$\|\lambda.x\| = |\lambda|.\|-x\| = |\lambda|.\|x\|$$
De plus, si $\lambda = 0$, alors $\|0\| = \inf\{\alpha > 0 : \frac{0}{\alpha} \in K\} = 0$
On peut donc conclure que $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall x \in X_K$, on a :
$$\|\lambda.x\| = |\lambda|.\|x\|$$
- Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, tel que $\frac{x}{\alpha}$ et $\frac{y}{\beta}$ soient deux éléments de X_K. On considère maintenant λ tel que
$$z = \lambda.\frac{x}{\alpha} + (1-\lambda)\frac{y}{\beta} = \gamma(x+y)$$
(Ici, on va supposer que x et y sont linéairement indépendants car si x et y ne sont pas linéairement indépendants l'inégalité triangulaire est alors montrée).
On en déduit alors que :

$$\frac{\lambda}{\alpha} = \gamma = \frac{1-\lambda}{\beta}$$
$$\lambda.\beta = \alpha - \lambda.\alpha$$
$$\lambda = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \text{ et } \gamma = \frac{1}{\alpha+\beta}$$

Par convexité de K, il vient que $z \in K$ et donc $\frac{x+y}{\alpha+\beta} \in K$. Et donc $\|x+y\| \leq \alpha+\beta$. On vient alors de montrer que $\forall(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\frac{x}{\alpha}$ et $\frac{y}{\beta}$, $\|x+y\| \leq \alpha+\beta$ et donc par conséquent :

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

- Comme K est un compact, il est borné, donc si $\|x\| = 0$, alors il existe $(\alpha_n) \to 0$ tel que $\frac{x}{\alpha_n} \in K$ donc on a :

$$\left\|\frac{x}{\alpha_n}\right\| \leq M$$

Et donc lorsque $n \to \infty$:

$$x = 0$$

Montrons maintenant que X_K est un espace de Banach : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans X_K. On considère :

$$M = \min\{t > 0 : t.x_n \in K, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Dans ce cas, la suite $\left(\frac{x_n}{M}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans K, qui est compact, donc on peut extraire une sous suite convergente $\left(\frac{x_{n_k}}{M}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, et par conséquent on a $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. Comme la suite (x_n) est de Cauchy et que (x_{n_k}) est convergente alors la suite (x_n) est convergente. En effet, si $x_{n_k} \to x$ et si (x_n) est de Cauchy, alors $\forall \epsilon > 0$, il existe :

- $K > 0$ tel que $\forall k > K$, $\|x - x_k\| < \frac{\epsilon}{2}$
- Et $M > 0$ tel que $\forall n$ et $m > M$ tel que $\|x_n - x_m\| < \frac{\epsilon}{2}$

Alors $\forall n > max\{K, M\}$ et $\forall k > max\{K, M\}$, alors

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| \leq \epsilon$$

On a alors montré que toute suite de Cauchy dans X_K est convergente :X_K est alors un espace de Banach.
Montrons maintenant que $\overline{B_{X_K}(0,1)} = K$:

- Si $x \in K$ alors, par définition d'un convexe équilibré, $||x|| \leq 1$, d'où $x \in \overline{B_{X_K}(0,1)}$ Donc :

$$K \subset \overline{B_{X_K}(0,1)}$$

- Inversement, soit $x \in \overline{B_{X_K}(0,1)}$, alors il existe $\lambda.x \in K$. Et comme K est un fermé, $x \in K$ tel que $\frac{x}{\alpha} \in K$. Donc :

$$\overline{B_{X_K}(0,1)} \subset K$$

En prenant X' séparant les points de X_K, les hypothèses du Théorème 4.2 sont alors vérifiées et le résultat est démontré. $\square$

Corollaire 4.6. — *Si K est un convexe fermé, borné, et équilibré d'un espace vectoriel topologique réflexif, alors X_K est un espace dual.*

Démonstration. — Il suffit de rappeler le fait que si X est un espace réflexif alors toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous suite faiblement convergente. Dans ce cas là, toute suite dans K (fermé et borné) admet une suite extraite faiblement convergente dans K. Alors K est un compact convexe et équilibré dans un espace localement convexe, et en appliquant le corollaire précédent, il vient que X_K est un espace dual. □

4.2. Une application : l'exemple de l'espace BMO($\mathbb{R}$). — Le but ici est de montrer que l'espace BMO($\mathbb{R}$) est le dual d'un autre et de déterminer son prédual. Pour cela introduisons cet espace.

Définition 4.7. — Soit f $\in L^2_{loc}(\mathbb{R})$, on pose pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$E_I(f) = \frac{1}{|I|}\int_I f dx, \text{ et } E_I^2(f) = E_I(|f - E_I(f)|^2)$$

Alors on dit que f est une fonction de BMO($\mathbb{R}$) si $\sup_I \{E_I^2(f)^{\frac{1}{2}}\} < \infty$. De plus ce nombre est la norme BMO.

Proposition 4.8. — *$f \in BMO(\mathbb{R})$ si et seulement si*

$$\textit{Il existe une suite } c_I \textit{ d'éléments de } \mathbb{R} : \sup_I\{\frac{1}{|I|}\int_I |f - c_I|^2\} < \infty.$$

En clair, si f est dans BMO($\mathbb{R}$) pour tout intervalle I, on peut prendre une autre constante que f_I, telle que l'intégrale est finie. Et surtout si on trouve une suite telle que l'intégrale ainsi définie est finie, alors f est dans BMO($\mathbb{R}$)

Démonstration. — Si il existe une suite c_I quelconque telle que $\sup_I\{\frac{1}{|I|}\int_I |f - c_I|^2\} \le A^2$ on note désormais f_I la moyenne de f sur I, c'est à dire : $f_I = E_I(f)$.

$$\begin{aligned}|c_I - f_I| &= |\frac{1}{|I|}\int_I c_I - f(x)\,dx| \\ &\le \int_I \frac{1}{|I|} \times |c_I - f(x)|\,dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(par Cauchy-Schwarz)} &\leq \left(\int_I \frac{1}{|I|^2}\,dx\right)^{1/2} \times \left(\int_I |c_I - f(x)|^2\right)^{1/2}\\
&= \frac{1}{|I|^{1/2}}\left(\int_I |c_I - f(x)|^2\right)^{1/2}\\
&\leq A.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\sup_I \frac{1}{|I|}\int_I |f(x) - f_I|^2\,dx\\
&\quad \leq \sup_I 2\frac{1}{|I|}\int_I |f(x) - c_I|^2\,dx + 2\frac{1}{|I|}\int_I |c_I - f_I|^2\,dx\\
&\quad \leq 4A^2.
\end{aligned}$$

□

Remarque 4.9. — On note que lorsqu'on définit une relation d'équivalence par $f \sim g$ si et seulement si $f - g =$ constante p.p et qu'on note $L = L^2_{loc}(\mathbb{R})/\sim$, alors BMO($\mathbb{R}$) $\subset L$

Proposition 4.10. — *U(f)* $= \sup_I \{E^2_I(f)^{\frac{1}{2}}\}$ *définit bien une norme.*

Démonstration. — En effet $E^2_I(f)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{|I|^{frac12}}\|f - E_I(f)\|_{L^2(I)}$. De ceci on en tire que :

1. Il est clair que $\forall f \in L^2_{loc}$, U(f) ≥ 0.
2. U(f) $= 0 \Rightarrow \|f - E_I(f)\|_{L^2(I)} = 0 \Rightarrow f = E_I(f), \forall I \Rightarrow f = cste$ (Sinon, $\exists I$ tels que il existe x et y dans I pour lesquels : $f(x) \neq f(y)$ Donc les deux ne peuvent être égaux en même temps à $E_I(f)$). Mais dans $L^2_{loc}(\mathbb{R})$ mod constante ceci revient à dire f = 0.
3. $U(\lambda f) = |\lambda| U(f)$:
$$\begin{aligned}
E^2_I(\lambda f)^{\frac{1}{2}} &= \|\lambda f - E_I(\lambda f)\|_{L^2(I)}\\
&= \|\lambda f - \lambda E_I(f)\|_{L^2(I)}\\
&= |\lambda| \times \|f - E_I(f)\|_{L^2(I)}\\
&= |\lambda| . E^2_I(f)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$
4. Enfin on a bien $U(f+g) \leq U(f) + U(g)$:
$$\begin{aligned}
\|f + g - E_I(f) + E_I(g)\|_{L^2(I)} &= \|f - E_I(f) + g - E_I(g)\|_{L^2(I)}\\
&\leq \|f - E_I(f)\|_{L^2(I)} + \|g - E_I(g)\|_{L^2(I)}
\end{aligned}$$

□

On regarde à présent l'espace $L^2_{loc}(\mathbb{R})$, on le définit comme

$\{f$ mesurables : $\forall n, q_n(f) < \infty\}$. Avec $q_n(f) = ||f||_{L^2([-n,n])}$

Donnons à présent un certain nombre de résultats qui sont non démontrés ici, mais dont la preuve est donnée dans *Introduction To Functional Analysis.*

Définition 4.11. — Un espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique métrique complet

Définition 4.12. — Un espace $\mathcal{P}$ de semi-normes continues sur un espace localement convexe E est appelé système fondamental si pour toute semi-norme q il y a un élément p dans $\mathcal{P}$ et $C > 0$ tels que $q \leq C.p$.

Lemme 4.13. — *Si E est un espace de Fréchet qui a un système fondamental de semi-normes p_k tels que tout espace local E_k est réflexif, alors E est réflexif.*

Proposition 4.14. — *Un sous espace X d'un espace de Fréchet E ayant un système fondamental de semi-norme est borné dans E si il est borné pour toute semi-norme dudit système. Il en va de même pour la fermeture.*

Soit à présent :

$P = \{g \in L^2(\mathbb{R})|$ g est à support dans un intervalle compact I, $\int gdx = 0$, et $||g||_{L^2(I)} \leq |I|^{\frac{1}{2}}\}$

et

$P_I = \{g \in L^2(I)$ tel que $E_I(g) = 0$ et $E_I(|g|^2) \leq 1\}$

On va utiliser les résultats de Vogt pour montrer le :

Théorème 4.15. —

$$BMO(\mathbb{R}) \text{ est l'espace dual de } \overline{vect(P)}$$

Pour ceci on a le résultat suivant :

Proposition 4.16. — *L (définit comme dans la remarque 4.9) est un espace de Fréchet réflexif.*

Démonstration. — Pour cela on définit les $L_n = L^2([-n,n])/\sim$, et on a $L = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$. Or les L_n sont des espaces réflexifs : $L^2([-n,n])$ est un espace de Hilbert, donc réflexif et de Banach, et l'espace des fonctions constantes est fermé. Par le lemme 4.13, L est réflexif. De plus on récupère un système fondamental de semi-normes : ce sont les semi-normes définies sur chaque L_n ; autrement dit les :

$$p_n(f) = inf_{c\in\mathbb{R}}(||f-c||_{L^2([-n,n])})$$

□

Proposition 4.17. —

$$||f||_{BMO} = \sup_{g\in P}(\int_{\mathbb{R}} fgdx)$$

Démonstration. — On va d'abord montrer que

$$E_I^2(f)^{\frac{1}{2}} = \sup\{E_I(fg) : g \in P_I\}.$$

Pour ceci on prend $H := \{f \in L^2(I) : \int_I fdx = 0\}$; on a alors $H := \ker(\phi)$ où $\phi(f) = \int_I f.1dx$. H est donc un sous espace fermé de $L^2(I)$ et en prenant le produit scalaire de cet espace, on récupère bien le résultat voulu : P_I étant la boule unité fermée de H.

Enfin on rappelle qu'on a pris pour $\|f\|_{BMO}$:

$$\sup_I \{E_I^2(f)^{\frac{1}{2}}\} = \sup_I \{\sup E_I(fg) : g \in P_I\}$$

$g \in P_I \Rightarrow E_I(|g|^2) \leq 1 \Rightarrow ||g||_{L^2(I)} \leq |I|^{\frac{1}{2}}$ □

Démonstration du théorème. — Par la proposition 4.16, BMO($\mathbb{R}$) est dans un espace réflexif, il s'agit désormais de montrer que sa boule unité est fermée bornée dans L. Pour ceci on va utiliser la proposition 4.14. Comme le système de semi-norme est donné par $p_n(f) = inf_{c\in\mathbb{R}}(||f-c||_{L^2([-n,n])})$ elle est plus petite que $||f||_{BMO} \leq 1$ si f est dans la boule unité fermée de BMO($\mathbb{R}$) notée B_{BMO}. Donc cette dernière est bornée dans L. Comme on a toujours $p_n(f) \leq ||f||_{BMO}, B_{BMO}$ est ainsi fermée. Les hypothèses du corollaire 4.6 sont ainsi vérifiées, et BMO($\mathbb{R}$) est un espace dual (il joue clairement le rôle du X_K, K étant B_{BMO})

Par la proposition 4.17 et la remarque 4.3, P est en dualité avec BMO($\mathbb{R}$), le second point du théorème est ainsi démontré. □

Le souci est de déterminer exactement l'adhérence de Vect(P). Pour ceci on a un résultat (non démontré) donné dans le livre de Rudin :

Théorème 4.18. — *Soit $\{x_n\}$ une suite d'éléments d'un espace de Banach X, avec $||x_n|| \leq 1$ pour tout n. Si il existe $\delta > 0$ tel que*

$$sup_n|\langle x_n, x^*\rangle| \geq \delta||x^*||$$

pour tout x^*, alors tout x de X peut être représenté sous la forme $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ *avec* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty$

Proposition 4.19. — *Tout élément de $\overline{Vect(P)}$ s'écrit de la forme*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \ \textit{avec} \ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty \ \textit{et} \ x_n \in P$$

Démonstration. — On a $||f||_{BMO} = \sup_{g \in P}(\int_{\mathbb{R}} fgdx)$. On remarque que les intervalles $I_{k,j} = [k2^j, (k+1)2^j]$, $\forall (k,j) \in \mathbb{Z}^2$, sont dénombrables et que les espaces $U_{k,j} = \{f \in L^2(I_{k,j}) : \int_{\mathbb{R}} f = 0$ et $||f||_{I_{k,j}} \leq |I_{k,j}|^{\frac{1}{2}}\}$ sont séparables et admettent donc une suite dense dans leur boule unité. De plus ces espaces recouvrent P ; on a au final :

$$\exists (p_n) \subset P : ||f||_{BMO} = sup_n|\langle p_n, f\rangle|$$

Puis on conclut par le théorème 4.18. □

Bibliographie

1. S. KAIJSER, *A Note On Dual Banach Spaces*, Math Scand.
2. H. BREZIS, *Analyse Fonctionnelle : Théorie Et Application*, Masson.
3. W. RUDIN, *Analyse Fonctionnelle*, Ediscience.
4. C. WAGSCHAL, *Topologie Et Analyse fonctionnelle*, Hermann.
5. MEISE, VOGT, *Introduction To Functional Analysis*, Oxford University Press.

---

27 mai 2011

Gautier Hanna
Thomas Viscarro