Modalité du contrôle continu: Chaque vendredi une feuille de quatre exercices à préparer est fournie. Les exercices sont à préparer pour la séance suivante. Au début du contrôle une liste sera présenté dans laquelle chaque étudiant déclare avec une croix les exercices préparés & résolus. Parmi ceux qui déclarent avoir résolus un exercice, trois personnes sont choisis au hasard, et présentent leur solution simultanément au tableau (5-10 minutes). Après on les discute ensemble.
Évaluation: si la solution présentée est correcte, la croix reste sur la liste. Si la solution est préparée, mais erronée, la croix pour l'exercice en question sera effacée. En cas de fraude (= exercice coché mais visiblement non préparé), toutes les croix du semestre seront effacées. A la fin du semestre, la note CC sera calculée par rapport au nombre de croix.

Exercice 1 Soit E un espace métrique, $A \subseteq E$ un ouvert et $B \subseteq E$ une partie quelconque.

a) Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

b) En déduire

  (i) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$.

  (ii) Si B est dense dans E, $\overline{A \cap B} = \overline{A}$.

  (iii) Si A et B sont denses dans E, $A \cap B$ est dense dans E.

Exercice 2 Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ une partie. Montrer que

$$\bigcap_{A \subset F \text{ et } F \text{ fermé}} F = \left\{ \lim x_n : \ (x_n) \in A^{\mathbb{N}} \text{ est une suite convergente de } X \right\}$$

Exercice 3 Soient X, Y deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application. Montrer l'équivalence

a) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $d_X(x, y) < \delta$ implique $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

b) L'image réciproque de tout ouvert de Y est ouvert dans X.

c) L'image réciproque de tout fermé de Y est fermé dans X.

d) Pour tout $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ (les adhérences pour X et Y respectivement).

Exercice 4 Soit X un espace vectoriel de dimension finie, et $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ son corps scalaire. Montrer que $X^* = \{\varphi : X \to \mathbb{K} : \ \varphi \text{ linéaire}\}$ est un espace vectoriel. Soit $\{b_1, .., b_n\}$ une base de X. Montrer que $\varphi_j(b_k) := \delta_{j,k}$ pour tout j, k définit bien une application linéaire $\varphi_j ; X \to \mathbb{K}$. Montrer que $\{\varphi_1, ..\varphi_n\}$ est une base de X^*.