Exercice 17 Soit E l'ensemble des suites complexes (vue comme fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$) telles que

$$\|f\|_E := \sup_{K\geq 0}\Big|\sum_{k=0}^{K} f(k)\Big| < \infty.$$

a) Montrer que E est un espace vectoriel.
b) Montrer que $\|f\|_E$ est une norme sur E.
c) Considérer $T : E \to \ell_\infty$ défini par $Tf = (f(0), f(0)+f(1), f(0)+f(1)+f(2), \ldots)$. Montrer que T est une bijection linéaire et isométrique.
d) Est-ce que E est un espace de Banach?

Exercice 18 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle *subdivision* de $[0,1]$ une suite finie $P = (t_0, ..t_N)$ satisfaisant $0 = t_0 < t_1 < .. < t_N = 1$. Posons $N_P(f) = \sum_{i=1}^{N-1} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$. Soit E l'ensemble des fonctions réelles sur $[0,1]$ tel que

$$\mathrm{Var}(f) = \sup\{N_P(f) : P \text{ subdivision de } [0,1]\} < \infty.$$

a) Montrer que E est un espace vectoriel.
b) Montrer que $\|f\| = |f(0)| + \mathrm{Var}(f)$ est une norme sur E.
c) Montrer que $\|f\|_\infty \leq \|f\|$ pour tout $f \in E$.
d) Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est complet. On pourra montrer d'abord qu'une suite de Cauchy admit une limite dans $B([0,1])$, l'espace des fonctions bornés sur $[0,1]$. Montrer que celle-ci est un élément de E. Conclure.

Exercice 19 Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Pour $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorphe et $1 \leq p \leq \infty$, on considère

$$N_{r,p}(f) = \Big(\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p \, dt\Big)^{1/p}$$

Soit $H^p(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} : \sup_{r\in(0,1)} N_{r,p}(f) < \infty\}$ et on pose $\|f\|_{H^p} = \sup_{r\in(0,1)} N_{r,p}(f)$.

a) Montrer que $\|\cdot\|_{H^p}$ est une norme sur $H^p(\mathbb{D})$.
b) Soit $z \in \mathbb{D}$ et $1 > r > |z|$. En écrivant $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$, montrer qu'il existe une constante $C(|z|, r)$ tel que $|f(z)| \leq C(|z|, r)\|f\|_{H^p}$
c) Montrer que la convergence en norme H^p implique la convergence uniforme sur tout compact $K \subset \mathbb{D}$.
d) Soit (f_n) Cauchy dans $H^p(\mathbb{D})$. Montrer que la limite $\lim_n f_n(z) =: f(z)$ existe pour tout $z \in \mathbb{D}$ et définit une fonction continue f sur $\mathbb{D}$.
e) Montrer que pour tout cycle γ dans $\mathbb{D}$ $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$ (ce qui montre que f est holomorphe sur $\mathbb{D}$).
f) Pour $\varepsilon > 0$ on note $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ un rang tel que $\|f_n - f_m\|_{H^p} \leq \varepsilon$ pour tout $n, m \geq M(\varepsilon)$. Soit $r \in (0,1)$ fixé. Montrer que $N_{r,p}(f_n - f) \leq \varepsilon$ pour $n \geq M(\varepsilon)$. Déduire que $H^p(\mathbb{D})$ est complet.

Les exercices seront contrôlés le vendredi 20. Octobre. La liste est à remplir avant le 20.10.2017, 13h00.