Devoir surveillé

3.11.2015

9:00 — 12:00

Exercice 1 Soit E un espace métrique tel que toutes les boules fermées sont compactes. Montrer que E est complet.

Exercice 2 Soit $(\alpha_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour $x = (\xi_n) \in \ell_\infty$ on pose $\|\!|x|\!\| = \sum_{k\geq 0} |\alpha_k \xi_k|$ (la somme pouvant prendre la valeur $+\infty$ en cas de divergence).

a) Pour $n \geq 0$ soit

$$x_n = (\mathbb{1}_{[n,\infty)}(j))_{j\geq 0} = (\underbrace{0,\ldots,0}_{n}, 1, 1, 1, \ldots) \in \ell_\infty$$

et

$$y_n = (\delta_{nj})_{j\geq 0} = (0,\ldots,0,1,0,0,\ldots) \in \ell_\infty.$$

Expliciter $\|\!|x_n|\!\|$ et $\|\!|y_n|\!\|$ pour tout $n \geq 0$.

b) Donner un critère nécessaire et suffisant pour que $\|\!|\cdot|\!\|$ soit une norme sur ℓ_∞.

c) Montrer que $\|\!|\cdot|\!\|$ n'est jamais équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 3 Soit $E = C([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme sup $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Soit φ une fonction bornée et continue par morceaux sur $[0,1]$. On pose

$$T(f) = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx$$

a) Montrer que $T : E \to \mathbb{R}$ est linéaire et continue.

b) Calculer $\|T\|$ lorsque φ est positive.

c) Calculer $\|T\|$ lorsque $\varphi(x) = 1$ sur $[0, 1/2)$ et $\varphi(x) = -1$ sur $[1/2, 1]$.

Exercice 4 Soit $X = \ell_\infty(\mathbb{R})$ l'espace des suites réelles bornées et

$$C = \{(x_n) \in X : (x_n) \text{ est convergente}\}.$$

a) Montrer que C est un sous-espace vectoriel de X.

b) Pour $x = (x_n) \in C$ on pose

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$$

Montrer que $\varphi : C \to \mathbb{R}$ est linéaire.

c) Soit $p(x) = \limsup_n x_n = \lim_n \big(\sup_{k\geq n} x_k\big)$. Soit $x, y \in X$ et $\lambda > 0$. Montrer $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ et $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.

d) Montrer qu'il existe une forme linéaire $\Phi \in X^*$ telle que

$$\forall x \in C : \Phi(x) = \varphi(x) \quad \text{et} \quad \forall x \in X : \Phi(x) \leq p(x)$$

e) Montrer que Φ satisfait

$$\liminf_n x_n \leq \Phi(x) \leq \limsup_n x_n$$

Question bonus: Déduire que c_0 n'est pas réflexif.

Exercice 5 Soit $k \in L_1(\mathbb{R})$ fixé et $p \in [1, \infty]$. Pour une fonction $f \in C_c(\mathbb{R})$, les fonctions continues à support compact, on pose

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x-y)\, f(y)\, dy.$$

a) Soit $p = \infty$. Montrer que $\|Tf\|_{L_\infty} \leq \|k\|_{L_1} \|f\|_{L_\infty}$. En déduire que pour tout $h \in C_c(\mathbb{R})$,

$$\varphi(h) := \int_{\mathbb{R}} (Tf)(x)\, h(x)\, dx \tag{1}$$

est bien défini.

b) Soit $p = 1$. Montrer que $\|Tf\|_{L_1} \leq \|k\|_{L_1} \|f\|_{L_1}$.

c) Soit dorénavant $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On rappelle la définition de φ par (1). Montrer l'estimation

$$|\varphi(h)| \leq \|k\|_{L_1} \|f\|_{L_p} \|h\|_{L_q}$$

d) Utiliser la densité (admise!) de $C_c(\mathbb{R})$ dans $L_q(\mathbb{R})$, pour montrer que φ, défini par (1) est une forme linéaire continue sur $L_q(\mathbb{R})$.

e) En déduire $Tf \in L_p(\mathbb{R})$ et $\|Tf\|_{L_p} \leq \|k\|_{L_1} \|f\|_{L_p}$ pour toute fonction $f \in C_c(\mathbb{R})$.

f) Utiliser la densité (à nouveau admise) de $C_c(\mathbb{R})$ dans $L_p(\mathbb{R})$, pour déduire $T \in \mathscr{L}(L_p(\mathbb{R}))$ et que $\|T\| \leq \|k\|_{L_1}$.

Exercice 6 Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur de rang un. Montrer qu'il existent alors $x, y \in H$ tels que

$$Th = (h|x) \cdot y$$

Indication: Soit $0 \neq z \in \operatorname{ran}(T)$. Justifier que φ défini par $Th = \varphi(h)z$ est bien défini. Montrer que φ est linéaire et continue, puis conclure.

Exercice 7 Soit X, Y deux espaces de Banach et Λ un ensemble. Pour tout $\lambda \in \Lambda$ soit $T_\lambda \in \mathscr{L}(X; Y)$. On suppose

$$\forall x \in X : \qquad \sup\{ \|T_\lambda x\| \quad \lambda \in \Lambda\} \quad < \quad \infty$$

a) On pose $A_n = \{x \in X : \forall \lambda \in \Lambda : \|T_\lambda x\| \leq n\}$. Montrer que A_n est un fermé dans X.

b) Montrer que $X = \bigcup_{n \geq 1} A_n$.

c) Déduire qu'il existe un $m \in \mathbb{N}^*$ tel que A_m contient une boule $B(z, R)$ avec $R > 0$.

d) Soit $\|x\| \leq 1$ et $0 \leq r < R$. Que peut on dire de $\sup_{\lambda \in \Lambda} \|T_\lambda (z + rx)\|$?

e) Déduire que

$$\sup\{ \|T_\lambda\| \quad \lambda \in \Lambda\} \quad < \quad \infty$$

FIN