Devoir surveillé du 3/11/2010
Documents autorisés: aide-memoire A4 recto,
Durée: 3h.

NB: $(.)^*$ *désigne une question plus difficile que la moyenne,* $(.)^+$ *est une question à points de bonus.*

Exercice 1 Soit X un espace métrique. On dit que X est séparable, s'il y a un ensemble dénombrable $A, A \subset X$, tel que $\bar{A} = X$.

(a) Montrer qu'un espace métrique compact est toujours séparable.

(b) Démontrer que $\ell^p, 1 \leq p < \infty$, sont séparables.

(c)* L'espace ℓ^∞ est-il séparable?

Exercice 2

(a) Énoncer le théorème d'application ouverte et le théorème d'application inverse. Déduire le deuxième résultat du premier.

(b) Considérons l'application $A : L^2([0,1], \mathbb{R}) \to L^2([0,1], \mathbb{R})$ définie par

$$(Af)(x) = x^{1/3} f(x), \quad f \in L^2([0,1], \mathbb{R}).$$

L'application A est-elle linéaire (démonstration!)? bornée (démonstration!)? Si oui, calculer sa norme.

(c)*+ L'application A^{-1} est-elle bien définie? Est-elle linéaire (démonstration!)? Donner la formule pour A^{-1} et préciser son domaine de définition. A^{-1} est-il borné?

(d)+ Le contenu de (b) et (c) ne contredit-il pas le théorème d'application inverse (voir (a))? Justifiez votre réponse.

Exercice 3 Soit $X = C^1([0,1], \mathbb{R})$ et $Y = C([0,1], \mathbb{R})$ des evn avec la norme SUP.

(a) Donner la définition d'un espace de Banach. Détailler la notion de la complétude. Donner avec justification un exemple d'un evn non-complet (différent de X, bien évidemment).

(b) Montrer que X n'est pas complet.

(c) Soit $A = \frac{d}{dx} : X \to Y$, i.e.

$$(Af)(x) = f'(x), \quad f \in C^1([0,1], \mathbb{R}).$$

Montrer que A est un opérateur fermé.

(d) Est-il borné? Y a-t-il une contradiction avec le théorème de graphe fermé?

T.S.V.P.

Exercice 4 Soit X un espace de Banach, $A \subseteq X$ une partie quelconque et B un ouvert de X.

(a) Montrer que $\overline{A} \cap B \subset \overline{A \cap B}$.

(b) Soit désormais A tel que $(\overline{A})^\circ \neq \emptyset$. Déduire qu'il existe $x \in X$, $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subseteq \overline{A}$.

(c) Démontrer que pour x, ε choisi selon (b) on a forcément $B(x, \varepsilon) \subseteq A'$, où A' désigne l'ensemble des points d'accumulation de A, i.e.

$$A' = \{a \in A : \exists (x_n)_{n \geq 1} \subset A \backslash \{a\} : \quad \lim_{n \to \infty} x_n = a\}.$$

Indication : pour obtenir (c), on pourra raisonner par absurde: supposer qu'il existe $y \in B(x, \varepsilon)$ qui n'est pas un point d'accumulation de A.

(i) En déduire l'existence d'un $\delta > 0$ tel que $B(y, \delta) \subset B(x, \varepsilon)$ et $B(y, \delta) \cap A \subset \{y\}$.

(ii) Déduire de $y \in \overline{A}$ que $B(y, \delta) \cap A = \{y\}$

(iii) Utiliser (a) pour arriver à la contradiction $B(y, \delta) = \{y\}$.

Exercice 5 (Pour cet Exercice, on pourra utiliser les résultats de l'Exercice 4)

Soit X un espace de Banach, $D \subset X$ un ensemble dense de X. Existe-t-il une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $|f(x)| < \infty$ pour tout $x \in X$ avec la propriété suivante: pour tout $d \in D$ et pour toute suite $(x_n) \subset X : x_n \to d$, on a

$$\limsup_{x \to d} f(x) = \infty?$$

Indication : on pourra considérer les ensembles $A_k = \{x : \ |f(x)| \leq k\}$, appliquer le théorème de Baire et utiliser les résultats de l'Exercice 4.

FIN