Feuille d'exercices n° 1.

Exercice 1 Soient E un espace métrique et A et B deux parties de E. Montrer que:

(a) Si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

Exercice 2 Soit A une partie d'un espace métrique E. Montrer que $A \cup (E \setminus A)^\circ$ est dense dans E.

Exercice 3 Soit E un espace métrique, $A \subseteq E$ un ouvert et $B \subseteq E$ une partie quelconque.

(a) Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

(b) En déduire

(i) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap \overline{B} = \emptyset$.

(ii) Si B est dense dans E, $\overline{A \cap B} = \overline{A}$.

(iii) Si A et B sont denses dans E, $A \cap B$ est dense dans E.

(c) Donner un exemple, avec A non ouvert, de parties denses dont l'intersection n'est pas dense.

Exercice 4 Sur $X =]0, +\infty[$ on définit $d(x, y) = |\ln \frac{x}{y}|$. Montrer que d est une distance. Expliciter les boules $B(x, r)$. Quelle est la topologie associée à d?

Exercice 5 Soit (E, d) un espace métrique et f une application croissante de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant:

(i) $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(ii) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

On définit $\delta(x, y) = f(d(x, y))$, $(x, y) \in E^2$.

(a) Montrer que δ est une distance.

(b) On suppose que f est continue à droite en 0. Démontrer que δ et d définissent les même topologies.

(c) Donner un exemple d'espace métrique et d'application f où d et δ ne définissent pas les mêmes topologies.

(d) Que peut–on dire de $d_1 = \inf(d, 1)$ et $d_2 = \frac{d}{d+1}$.

Exercice 6 Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E.

(a) Montrer que $\overline{A} = \cap_{r>0} V_r(A)$ où $V_r(A) = \{x \in E, d(x, A) < r\}$.

(b) En déduire que tout fermé est intersection dénombrable d'ouverts. Que peut–on dire pour les ouverts?

(c) Donner un exemple d'une réunion dénombrable de fermés qui n'est ni ouverte ni fermée.

Exercice 7 Soient p et $q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Soient $a, b > 0$. Montrer que $ab = \inf_{t>0} \frac{t^p}{p} a^p + \frac{t^{-q}}{q} b^q$.

(b) En déduire que pour tout $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

(c) En remarquant que $|x_i + y_i|^p \leq |x_i||x_i + y_i|^{p-1} + |y_i||x_i + y_i|^{p-1}$ démontrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

et en déduire que $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

(d) Pour $p \geq 1$ on désigne par ℓ^p l'ensemble des suites réelles ou complexes $x = (x_n)_n$ telles que $\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$. Montrer que $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur ℓ^p.

Exercice 8 On désigne par ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles bornées et on pose $\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |x_n|$ où $x = (x_n)_{n\geq 0}$ sont dans ℓ^∞.

(a) Montrer que $\|.\|_\infty$ est une norme.

(b) Soit $A = \{x \in \ell^\infty; \forall n \geq 0, |x_n| < 1\}$. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de A dans ℓ^∞. L'ensemble A est–il ouvert? est–il fermé?

Exercice 9

(a) Soit E l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|;\ x \in [0, 1]\}, \quad (f \in E).$$

Soit $A = \{f \in E :\ \forall x \in [0, 1] :\ |f(x)| < 1, \}$. Montrer que A est un ouvert de E. Déterminer son adhérence.

(b) Soit maintenant F l'espace des fonctions continues et bornées sur l'intervalle ouvert $]0, 1[$, muni de la distance

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|;\ x \in]0, 1[\}, \quad (f \in F).$$

Soit $B = \{f \in F :\ \forall x \in]0, 1[:\ |f(x)| < 1, \}$. B est–il un ouvert de F? quel est son intérieur?

Exercice 10 Soit E l'espace des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, nulles à l'origine et ayant des dérivées bornées. Pour $f \in E$ on pose $|||f||| = \|f'\|_\infty$. Démontrer que $|||.|||$ est une norme et la comparer à $\|.\|_\infty$.

Exercice 11

(a) Trouver un espace métrique dans lequel l'adhérence d'une boule ouverte n'est pas nécessairement la boule fermée associée. De même trouver un espace métrique dans lequel l'intérieur d'une boule fermée n'est pas nécessairement la boule ouverte associée.

(b) Montrer que dans un espace vectoriel normé, l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée associée et l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte associée.

Exercice 12 Soit E un espace vectoriel normé et F un sous espace vectoriel de E. Déterminer l'intérieur de F.

Exercice 13 Soit (E, d) un espace métrique et (x_n) une suite de Cauchy dans E. On suppose que (x_n) admette une sous-suite extraite qui converge vers l. Montrer que (x_n) converge vers l.

Exercice 14 Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(a) E est complet.

(b) Toute suite $(x_n)_n$ telle que $\sum_n d(x_n, x_{n+1}) < +\infty$ est convergente.

(c) Toute suite $(x_n)_n$ telle que pour tout n, $d(x_n, x_{n+1}) \leq 2^{-n}$ est convergente.

Exercice 15 Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que E est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

Exercice 16 Soit (E, d) un espace métrique complet et F une partie de E. Montrer que F, muni de la topologie induite par celle de E est complet si et seulement si F est fermé.

Exercice 17 On considère les ensembles de suites réelles ou complexes suivants:

$$\ell^p = \{x = (x_n) | \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < +\infty\}, \quad p \in [1, +\infty[\quad \text{et} \quad \ell^\infty = \{x = (x_n) | \sup_n |x_n| < +\infty\},$$

et c_0 l'espace des suites qui tendent vers 0. On les munit par les normes $\|x\| = \sup_n |x_n|$ pour c_0 et ℓ^∞, $\|x\|_p$ pour ℓ^p.

(a) Démontrer que ce sont des espaces vectoriels normés complets.

(b) On appelle c_{00} l'ensemble des suites réelles nulles a partir d'un certain rang. Montrer que c_{00} est dense dans c_0. L'espace métrique c_{00} est–il complet?

(c) Démontrer que les injections de ℓ^p dans c_0 et c_0 dans ℓ^∞ sont continues. Calculer leur norme.

(d) Soit p et q tels que $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Montrer que si $x \in \ell^p$ alors $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ et donc $\ell^p \subset \ell^q$.

Exercice 18 Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.

(a) L'application $P \mapsto \int_0^1 |P(x)|\, dx$, est-elle une norme sur E?

(b) L'application $P = \sum_{i=0}^n a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^n |a_i|$, est-elle une norme sur E?

(c) Soit $A = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : \ a_n = 1\}$. Montrer que

$$\inf_{P \in A} \int_0^1 |P(x)|\, dx =: \alpha > 0$$

Exercice 19 Soit (E, d) un espace métrique. Si A est une partie de E, le diamètre de A est défini par $\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A \times A} d(x, y)$. Démontrer que E est complet si et seulement si pour toute suite décroissante $(F_n)_n$ de fermés non vides de E, tels que $\lim_{n \to +\infty} \delta(F_n) = 0$, on a $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$.

Exercice 20 Soit E un espace métrique et (K_n) une suite décroissante de compacts non-vides de E.

(a) Montrer que $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$.

(b) Si Ω est un ouvert contenant l'intersection des K_n, montrer qu'il existe un n tel que $K_n \subseteq \Omega$.

Exercice 21 Soit E un espace métrique compact. Démontrer que pour qu'une suite soit convergente, il faut et il suffit qu'elle admette une seule valeur d'adhérence. Donner un contre-exemple à ceci si E n'est pas compact.

Exercice 22 Soient A, B des paries compactes disjointes d'un espace métrique E. Montrer qu'il existent des voisinages séparantes, c'est à dire des ouverts U, V tel que $A \subset U$ et $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 23 Soit (E, d) un espace métrique compact et f une application de E dans lui même vérifiant

$$\forall x \neq y \in E : \quad d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

En considérant $\phi(x) = d(x, f(x))$ montrer que f admet un point fixe.

Exercice 24 Soient X, Y deux espaces métriques. On suppose que Y est compact. Montrer que $f : X \to Y$ est continue si et seulement si son graphe est fermé.