Spectre, Résolvante

Exercice 1

(a) La série de (Carl Gottfried) Neumann, 1877 : Soit $\|T\| < 1$. Déterminer $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$.

(b) Déduire que $\sigma(T) \subseteq \overline{B(0, \|T\|)}$.

(c) Soit $\lambda_0 \in \varrho(T)$. En utilisant

$$\lambda - T = (\lambda_0 - T) + (\lambda - \lambda_0) = (\lambda_0 - T)[\mathrm{Id} - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1}]$$

et un développement en série de Neumann, montrer que $\varrho(T)$ est ouvert.

(d) Montrer que $\|R(\lambda, T)\| \geq \frac{1}{d(\lambda, \sigma(T))}$

Exercice 2 Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et T on opérateur linéaire borné. Montrer que $\sigma(T) \neq \emptyset$ (indication: pour $\varphi \in \mathcal{L}(X)'$ considérer $f(\lambda) = \varphi(R(\lambda, A))$ et utiliser le théorème de Liouville).

Exercice 3 Soit T un opérateur borné sur X tel que $\|T\| \in \sigma(T)$. Faire un dessein. Déterminer $\sigma(\mathrm{Id} + T)$ en termes de $\sigma(T)$. Conclure $\|\mathrm{Id} + T\| = 1 + \|T\|$.

Exercice 4 Soit $p \in [1, \infty]$ et S le 'shift à gauche' sur $\ell_p(\mathbb{N})$, c'est à dire $S((x_n)_{n \geq 0}) = (x_{n+1})_{n \geq 0}$.

(a) Déterminer $\|S\|$.

(b) Déterminer les valeurs propres de S.

(c) Trouver $\sigma(S)$.

Exercice 5 Soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Montrer que $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$ où $T^* \in \mathcal{L}(X')$ est l'opérateur adjoint de T.

Exercice 6 Soit $\in [1, \infty]$ et S le 'shift à gauche' sur $\ell_p(\mathbb{Z})$, c'est à dire $S((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) = (x_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$.

(a) Déterminer $\|S\|$.

(b) Est-ce que $0 \in \sigma(S)$? Conclure $\sigma(S) \subseteq S^1$.

(c) En cas $p = \infty$, trouver $\sigma(S)$.

(d) Soit $p < \infty$ et $e^{i\theta} \in S^1$. Montrer que $(e^{i\theta}\mathrm{Id} - S)$ n'est pas surjectif.

Exercice 7 Soit $(\lambda_n) \in \mathbb{C}$ et T l'opérateur défini sur $\ell^p (1 \leq p \leq \infty)$ par

$$(Tu)(n) = \lambda_n u(n) \quad \forall n, \; u \in \ell^p.$$

(a) Montrer que T est continu si et seulement si (λ_n) est bornée.

(b) Dans le cas où T est continu, déterminer ses valeurs propres et son spectre.

(c) Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un compact. Construire un opérateur sur ℓ_p dont le spectre est K.

Exercice 8 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction numérique. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon > 0$ on considère $I_{\lambda,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R} : |\varphi(x) - \lambda| < \varepsilon\}$ On appelle *image essentielle* de φ

$$\mathrm{Im}_{\mathrm{ess}}(F) = \{z \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 : \mu(I_{\lambda,\varepsilon}) > 0\}$$

où μ est la mesure de Lebesgue. Soit $H = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On considère l'opérateur de multiplication $(Mf)(x) = \varphi(x)f(x)$ sur H.

(a) Montrer que M est borné.

(b) Soit $\lambda \notin \mathrm{Im}_{\mathrm{ess}}(\varphi)$ et $\varepsilon > 0$ choisi convenable (comment?). Considérer l'opérateur

$$R_\lambda g = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |\varphi(x) - \lambda| < \varepsilon \\ \frac{g(x)}{\varphi(x)-\lambda} & \text{si} \quad |\varphi(x) - \lambda| \geq \varepsilon \end{cases}$$

Montrer que les ensembles $\{x : \ (\lambda - M)R_\lambda(x) \neq g(x)\}$ et $\{x : \ R_\lambda(\lambda - M)g(x) \neq g(x)\}$ sont de mesure nulle. Conclure que $\lambda \in \varrho(M)$.

(c) Soit maintenant $\lambda \in \mathrm{Im}_{\mathrm{ess}}(\varphi)$. On considère les ensembles $G_n = \{x : \ |\varphi(x) - \lambda| < \frac{1}{n}\}$ for $n \in \mathbb{N}$. et les fonctions $g_n = \mathbb{1}_{G_n}$ (en cas où $\mu(G_n) = \infty$, on remplacera G_n par $G_n \cap B(0, R)$ pour R suffisamment grand pour obtenir un ensemble de mesure fini mais non-nulle).

(i) Montrer que $g_n \in H$.

(ii) Soit $f_n = (\lambda - M)g_n$. Montrer que $\|f_n\| \leq \frac{1}{n}\|g_n\|$.

(iii) Déduire que $\lambda - M$ n'a pas d'inverse borné et donc que $\lambda \in \sigma(M)$.

Exercice 9

(a) Soit (a_n) une suite réelle tel que $0 \leq a_{n+m} \leq a_n a_m$ pour tout n, m. Montrer que $\sqrt[n]{a_n} \to a = \inf_n \sqrt[n]{a_n}$

(b) Soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Montrer que $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \to \inf_n \|T^n\|^{\frac{1}{n}} =: r(T)$.

(c) Montrer que $\sigma(T) \subseteq \overline{B(0, r(T))}$.

Exercice 10 Soit $T \in \mathcal{L}(C[0,1])$ donné par:

$$Tf(x) = \int_0^x k(x,y)f(y)dy \quad \forall f \in C[0,1]$$

où k est une fonction continue sur $[0,1] \times [0,1]$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall f \in C[0,1]$

$$|T^n f(x)| \leq \|f\|_\infty \|k\|_\infty^n \frac{x^n}{n!}.$$

(b) Déterminer $r(T)$, puis $\sigma(T)$.