Opérateurs compacts

Soient désormais X, Y, Z des espace vectoriels normés.

Question de cours 1 Soit $T : c_0 \to \ell_\infty$ donné par l'identité $T(x) = x$. Est-ce que l'image $\mathcal{R}(T)$ de T est fermé?

Question de cours 2 Un opérateur linéaire $T : X \to Y$ tel que $\overline{T(B_X(0,1))}$ est compact est appelé un *opérateur compact*. Montrer qu'un opérateur compact est continue. Est-ce que tout opérateur continue est compact (dém. ou contre-exemple)?

Question de cours 3 Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Montrer que T est compact si X est de dimension finie. Montrer que T est compact si son image $\mathcal{R}(T) \subseteq Y$ est un sous-espace de dimension finie.

Question de cours 4 Montrer que l'identité est compact sur X si et seulement dim $(X) < \infty$.

Question de cours 5 Soit $S \in \mathcal{L}(X, Y)$, $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$ tel que S ou T sont compacts. Montrer que TS est compact.

Exercice 6 On note par $K(X, Y)$ les opérateurs compacts de X dans Y.

(a) Montrer que $K(X, Y)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X, Y)$.

(b) On suppose désormais que X, Y sont des espaces de Banach. Soit (T_n) une suite d'opérateurs compacts qui converge vers $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ en norme (c'est à dire $\|T_n - T\| \to 0$). Soit (x_n) une suite borné de X. Construire une sous-suite extraite (ξ_n) de (x_n) tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad (T_n \xi_i)_{i \geq 0} \quad \text{converge}$$

(utiliser la compacité des T_n et un argument 'diagonal'). En déduire $(T\xi_n)$ est une suite de Cauchy.

(c) Déduire que $K(X, Y)$ est un espace de Banach.

(d) Soit T_n une suite d'opérateurs à image de dimension finie et soit $T = \lim_{n\to\infty} T_n$ en norme d'opérateur. Montrer que T est compact.

Exercice 7 $X = \ell_p$ pour $p \in (1, \infty)$.

(a) Soit (λ_n) une suite complexe et T le 'multiplicateur' sur X donné par

$$T(x_n) = (\lambda_n x_n).$$

Montrer que T est borné si et seulement si (λ_n) est borné.

(b) Montrer que T est compact si et seulement si $\lambda_n \to 0$.

(c) Soit $SX \to X$ le 'shift à droite' $S(x_n) = (y_n)$ où $y_0 = 0$ et $y_{n+1} = x_n$. Est-ce que S est compact?

Exercice 8 Soit $k \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ et $(T_k f)(x) = \int_{\mathbb{R}} k(x,y) f(y)\, dy$.

(a) Montrer que $T_k : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ satisfait $\|T_k\| \le \|k\|_{L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})}$.

(b) En approchant k avec des fonctions étagés de la forme

$$k_n(x,y) = \sum_{j,k=1}^{N_n} \alpha_{j,k}^{(n)} \mathbb{1}_{E_{j,n}}(x) \mathbb{1}_{F_{k,n}}(y)$$

montrer que T_k est compact (utiliser Exercice 6).

Exercice 9 Soient X, Y des espaces de Banach et $T \in K(X,Y)$. Montrer que si (x_n) converge faiblement vers x, alors (Tx_n) converge (en norme) vers Tx.

Rappel: Soit K un espace métrique compact. Le théorème de Arzelà-Ascoli dit qu'une partie $M \subset C(K)$ est compacte si elle est (1) borné, (2) fermé et (3) équicontinue, c'est à dire si

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall f \in M : d(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Exercice 10 Pour $\alpha \in (0,1)$ et $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) on définit

$$[f]_\alpha = \sup_{t,s \in [a,b], t \neq s} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha}$$

et on pose $C^\alpha([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{K} : [f]_\alpha < \infty\}$ muni de la norme $\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + [f]_\alpha$.

(a) Montrer que $(C^\alpha([a,b]), \|\cdot\|_\alpha)$ est un espace de Banach.

(b) Montrer que la boule unité fermée de C^α est un compact de $C([a,b])$.

(c) Soit $0 < \alpha < \beta < 1$. Montrer que pour tout $f \in C^\beta$ et tout $\eta > 0$,

$$|f|_\alpha \le \max\left(2\|f\|_\infty \eta^{-\alpha}, \eta^{\beta-\alpha}[f]_\beta\right).$$

En déduire que si (f_n) est une suite bornée de C^β qui converge uniformément (i.e. en norme $\|\cdot\|_\infty$) vers $f \in C^\beta$ alors (f_n) converge vers f dans C^α.

(d) Montrer que pour $0 \le \alpha < \beta < 1$, le plongement $C^\beta([a,b]) \hookrightarrow C^\alpha([a,b])$ est compact.

Exercice 11 Soit E un sous-espace fermé de $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ qui est contenu dans $C^1([0,1])$.

(a) Montrer que E est complet pour la norme

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

(b) En déduire que les normes $\|.\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes sur E.

(c) Montrer que la boule unité de E est relativement compacte pour le norme $\|\cdot\|_\infty$.

(d) En déduire que E est de dimension finie.