Examen analyse 3

Q1) On observe que $\underbrace{\cos(2x+1)}_{v'} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{u}$

donc $I = \int_{\pi}^{M} \cos(2x+1) \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$

$$= \underbrace{\left[\frac{\sin(2x+1)}{2\sqrt{x}}\right]_{\pi}^{M}}_{\xrightarrow{M\to\infty} \frac{-\sin(1)}{2\sqrt{\pi}}} + \frac{1}{4} \underbrace{\int_{\pi}^{M} \sin(2x+1) \frac{1}{x^{3/2}} \, dx}$$

$$\leq \int_{\pi}^{M} |\cdots| \, dx = \int_{\pi}^{M} \frac{1}{x^{3/2}} \, dx$$

qui conv. par Riemann.

Q2 (a) vu que $\frac{\sinh(n)}{\cosh(n)} = \frac{e^{n} - e^{-n}}{e^{n} + e^{-n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$,

$a_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div.

(b) on observe que $b_n = \frac{n^2}{4^n} \leq \frac{1}{2^n}$ pour $n \geq 4$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge   série géométrique raison $\frac{1}{2}$.

(c) Sur $[0,1]$, $\sin(x)$ est strict^t croiss.

$\frac{1}{n} \in [0,1]$, $\left(\frac{1}{n}\right)$ décroiss.

Ainsi, $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ tend monotoném^t à zéro.

$\overset{\text{Leibniz}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ converge.

Q3. Observons que $\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}} = 1 - \frac{(-1)^n}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

(ou bien $= 1 - \frac{(-1)^n}{2n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$ avec $\varepsilon_n \to 0$).

Ainsi, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{\varepsilon_n}{n^2}\right)$

Par Leibniz, $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ conv.,

par Riemann, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|1+\varepsilon_n|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c}{n^2}$ cv.

Ainsi, la somme converge. (Par contre elle ne cv pas abs.)

Q4. [Le rayon de cv est le plus grand cercle centré autour de l'origine dans lequel la série $\sum_{0}^{\infty} a_n z^n$ cv.]

(a) La formule de Hadamard dit que

$R = \frac{1}{\alpha}$ où $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

avec la convention $R=0$ si $\alpha=\infty$ et $R=\infty$ si $\alpha=0$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n$ est une série géométrique!

cv ssi $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \leadsto R=2$.

D'autre part $\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} = \alpha$

$\Rightarrow R=2$.

(b) $\sqrt[n]{\dfrac{n^2}{3^n+n}} = \dfrac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{3^n+n}}$.

$\sqrt[n]{n^2} \longrightarrow 1$ par $e^{\underbrace{\frac{2}{n}\ln(n)}_{\to 0}}$. (*)

$3^n \leq 3^n+n \leq 2\cdot 3^n$

$\Rightarrow \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{3^n+n} \leq \sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{3^n}$

$\Leftrightarrow \quad 3 \leq \sqrt[n]{3^n+n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{2}}\cdot 3$

$\longrightarrow 1$ pareil que (*).

Ainsi, $\underline{\underline{R=3}}$.

(c) $\sum (4x^2)^n$ est géométrique. Ainsi, la cond. devient

et que $|4x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$.

on s'attend à $R = \frac{1}{2}$.

$\sqrt[2n]{4^n} = 2 \xrightarrow{n\to\infty} 2 = \alpha$ ce qui colle

à l'obs. initiale.

$\underline{Q5|}$ a) pour $x \neq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \sin(x) < 1 \Rightarrow \sin(x)^n \longrightarrow 0$.

pour $x = \frac{\pi}{2}$ cependant $f_n(\frac{\pi}{2}) = 1 \longrightarrow 1$.

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & x = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

f étant non-continu, les f_n sc, la conv. ne peut pas être uniforme.

(b) $n + n^2 x \longrightarrow +\infty$ pour $n\to\infty$, $x>0$.

Ainsi $g_n(x) \longrightarrow \frac{\pi}{2}$.

Du fait que arctan(x) est strictement croiss.,

$$\left| g_n(x) - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2} - \arctan(n + n^2 x) \leq \frac{\pi}{2} - \arctan(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, la conv. est uniforme

<u>Q6</u> a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Or $\frac{x}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$,

il ex. n_0 : Pour $n \geq n_0$, $\left|\frac{x}{\sqrt{n}}\right| < \frac{\pi}{2}$, ce qui entraine $\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) > 0$. On peut donc écrire

$$\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{n \cdot \ln\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)}.$$

Or. $\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$

$\ln(1+z) = z + \cancel{o(z)} - \frac{z^2}{2} + o(z^2)$.

Ainsi, $\ln\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) = -\frac{x^2}{2n} + o\left(\frac{x^2}{n}\right)$.

On obtient $n \ln\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right) = -\frac{x^2}{2} + \underbrace{n \cdot o\left(\frac{x^2}{n}\right)}_{\to 0\,!}$

$\Rightarrow f_n(x) \longrightarrow x \cdot e^{-x^2/2}$.

(b) • Pour $x \in K$ compact, $|x| \leq C$ et donc $n \cdot o\left(\frac{x^2}{n}\right) = n \cdot o\left(\frac{1}{n}\right)$. Ainsi la conv. est uniforme sur K!

• Par conséquent

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x \cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n dx = \int_0^1 \lim f_n(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 x\, e^{-x^2/2} dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Q7| On rappelle que pour $|x| \leq r < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ conv. unif. (même normalement)

Ainsi, $$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.$$

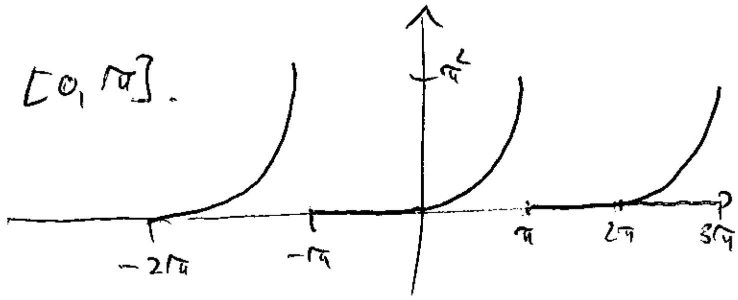
d'où $$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Il suit que
$$S = \frac{14}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{14}{3} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} = 42.$$

(Les lecteurs de D. Adams s'attendaient à cette réponse.)

Q8| $$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^2 & x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

a)



b) $$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{6}.$$

pour $n \neq 0$,
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2 e^{-inx}\,dx$$

$$\overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{2\pi}\left[x^2 \frac{e^{-inx}}{-in}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2x \frac{e^{-inx}}{-in}\,dx$$

$$= \frac{i\pi}{2n}(-1)^n - \frac{i}{\pi n}\int_0^{\pi} x \cdot e^{-inx}\,dx$$

IPP

$$= \frac{i\pi}{2n}(-1)^n - \frac{i}{\pi n}\left[x\,\frac{e^{-inx}}{-in}\right]_0^{\pi} + \frac{i}{\pi n}\int_0^{\pi}\frac{e^{-inx}}{-in}\,dx$$

$$= \frac{i\pi}{2n}(-1)^n + \frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{i}{n^3}\left((-1)^n - 1\right)$$

c) Or, $f \in \mathcal{C}^1$ par morceaux,

$$\underbrace{S_N(f;x)}_{} \longrightarrow \frac{f(x+) + f(x-)}{2}$$

$$= \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{N}\left(c_n e^{inx} + \underline{c}_n e^{-inx}\right).$$

en évaluant en $x=0$, $\quad 2\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$

Soit $S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$

on dispose $\quad \sum_1^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}}_{=\frac{S}{4}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}.$

et $\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{3}{4}\cdot S$

Ainsi, $\quad -\frac{\pi^2}{12} = \frac{S}{4} - \left(S - \frac{1}{4}S\right) = -\frac{S}{2}$

donc $\quad \underline{\underline{S = \frac{\pi^2}{6}}}.$ $\qquad$ ouff.

Problème

(a) si $f = 1$, $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1 = 1$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx = 1. \checkmark$$

(b) Soit

$$S = 1 + q + \dots + q^{N-1}$$
$$- \quad qS = \quad q + \dots + q^{N-1} + q^N$$
$$(1-q)\, S = 1 - q^N.$$

Pour $q \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ on peut diviser, et obtient

$$S = \frac{1-q^N}{1-q} \quad \text{et} \quad qS = q\,\frac{1-q^N}{1-q}.$$

(c) pour $f(t) = e^{ikt}$, $f(2\pi n\gamma) = e^{2\pi i k\cdot\gamma} \neq 1$

car $\gamma \notin \mathbb{Q}$.

Ainsi,
$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(2\pi n\gamma)\right| = \left|\frac{e^{2\pi i k\gamma}}{N}\,\frac{1-e^{2\pi i\gamma k N}}{1-e^{2\pi i\gamma k}}\right|$$
$$\leq \frac{2}{N}\cdot\frac{1}{|1-e^{2\pi i\gamma k}|} \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

trivialement, $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$.

(d) Vu que $f \mapsto \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(2\pi n\gamma)$ est linéaire

et $f \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$ aussi,

ceci est évident.

(e) Soit f continue et 2π-périodique, et $\varepsilon > 0$.

On choisit P t.q. $\|f - P\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$.

Alors pour $N \geq N_0$ (qui dépend de p uniquement)

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(2\pi n\gamma) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\right|$$
$$\leq \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\big(f(2\pi n\gamma) - p(2\pi n\gamma)\big)\right| + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p(2\pi n\gamma) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t)\,dt\right| + \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(t) - f(t)\,dt\right|$$
$$\leq \varepsilon. \quad \square$$

FIN