université de BORDEAUX

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2014 / 2015
EXAMEN D'ÉTÉ
DEUXIÈME SESSION

Licence 2, analyse 3
Durée : 3h00
Documents : non autorisés
Calculatrice: inutile, mais autorisé

Collège Sciences et technologies

Penser à bien justifier vos réponses.
La correction tiendra compte de la qualité de la rédaction.

Question 1 Étudier la convergence des *séries numériques* de terme général suivants:

$$a_n = (-1)^n \arctan(\tfrac{1}{n}) \quad ; \quad b_n = \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad c_n = \tfrac{\ln(n)}{n^2}$$

Question 2 Calculer le rayon de convergence de chacune des *séries entières* suivantes:

$$\sum_{n\geq 1} \tfrac{x^n}{1+2^n} \quad ; \quad \sum_{n\geq 0} \tfrac{n}{3^n+n} x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} 4^n x^{2n}$$

Question 3 Discuter la convergence ponctuelle (ou simple) sur $[0,1]$ ainsi que la convergence uniforme sur $[0,1]$ des *suites de fonctions* suivantes:

a) $f_n(x) = \left(\frac{x}{1+\ln(x)^2}\right)^n$ pour $x \in (0,1]$ et $f_n(0) = 0$.

b) $g_n(x) = (1-x)x^n$.

Question 4 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n(x) = \frac{1}{(n+x)^3}$ sur l'intervalle $I = (-1, \infty)$.

a) Étudier la convergence ponctuelle (ou simple) de la *série de fonctions* $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ sur I.

b) Étudier la convergence uniforme la série $u(x)$ sur I et sur $[a, \infty)$ pour $a > -1$.

c) Montrer que u est de classe $C^1(I)$.

Question 5 Pour $x \geq 0$ on définit

$$\varphi(x) := \int_0^x e^{-t^2/2}\, dt.$$

a) Rappeler la série entière de $\exp(\cdot)$, et déterminer son rayon de convergence.

b) Déduire la série entière de $e^{-t^2/2}$, et démontrer sa convergence normale sur tout intervalle de la forme $[-M, M]$.

c) S'en servir pour établir une série entière de φ. Justifiez votre réponse.

Question 6 On cherche une solution de d'équation différentielle

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{rl} y''(x) - x\, y'(x) - y(x) & = 0 \\ y(0) & = 1 \\ y'(0) & = 0 \end{array} \right.$$

a) On suppose que la solution admet un DSE de la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avec un rayon de convergence strictement positif. Déduire une condition nécessaire sur la suite numérique les coefficients (a_n) en justifiant vos réponses.

— TOURNER LA PAGE, S.V.P. —

b) On considère la suite récurrente définie par

$$\left\{\begin{array}{rl} a_0 & = 1 \\ a_1 & = 0 \\ (n+2)a_{n+2} + a_n & = 0 \quad n \geq 0 \end{array}\right.$$

Expliciter a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Indication: $2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2k) = 2^k k!$.

c) Expliciter la fonction $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ainsi que son rayon de convergence. Déduire qu'il s'agit d'une solution de $(*)$.

Question 7 Soit f la fonction 2π–périodique définie par

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } x \in [-\pi, 0] \\ x & \text{si } x \in [0, \pi) \end{array}\right.$$

a) Faire une esquisse de la courbe représentative de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Calculer les coefficients de Fourier[1] de f.

c) Quel est la somme de la série de Fourier de f au point $x = \pi$? Justifier votre réponse.

Question 8

a) Pour quelles $\alpha > 0$ la limite $S(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=\!=} \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ existe-t-elle (sans preuve)?

Soit $S_N(\alpha)$ la somme partielle, c'est à dire $S_N(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=\!=} \sum\limits_{n=1}^{N} n^{-\alpha}$.

b) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^{N-1} n(a_n - a_{n+1}) = \Big(\sum_{k=1}^{N-1} a_k\Big) \; - \; (N-1)a_N$$

c) Pour $x \in \mathbb{R}$, on désigne par $[x]$ sa partie entière. Soit $\alpha > 1$ et

$$f_N(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=\!=} \alpha \int_1^N \frac{[x]}{x^{\alpha+1}}\, dx$$

Découper l'intervalle $[1, N]$ en union disjointe d'intervalles I_n de façon à ce que la fonction $x \mapsto [x]$ devienne une fonction constante sur chaque intervalle I_n. S'en servir pour montrer que $\lim_{N\to\infty}(f_N(\alpha) - S_N(\alpha)) = 0$.

d) Soit $\alpha > 1$ et

$$g(\alpha) \stackrel{\text{def.}}{=\!=} \tfrac{\alpha}{\alpha-1} - \alpha \int_1^{\infty} \frac{x - [x]}{x^{\alpha+1}}\, dx$$

Déduire de la question précédente que $g(\alpha) = S(\alpha)$ pour $\alpha > 1$.

e) Montrer que l'intégrale définissant $g(\alpha)$ converge pour $\alpha > 0$.

Remarque: L'application $\alpha \mapsto g(\alpha)$ est appelé la fonction zêta de Riemann. Dans l'énoncé de la question, on pourrait remplacer la condition $\alpha > 0$ par $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, car pour $x > 0$,

$$|x^\alpha| = |\exp(\alpha \ln(x))| = \exp(Re(\alpha)\ln(x)).$$

La question si oui ou non, toutes les zéros de la fonction zêta se trouvent sur la droite affine donné par $\mathrm{Re}(\alpha) = 1/2$ est un problème ouvert, appelé la conjecture de Riemann.

— FIN —

[1] réelles ou complexes, selon vos préférences