université de BORDEAUX

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2016 / 2017
PREMIÈRE SESSION

Collège Sciences et technologies

Master 1
Cours «Analyse: dualité et convergence»
Ni documents ni calculatrice sont autorisés.

Penser à bien justifier vos réponses.
La correction tiendra compte de la qualité de la rédaction.

Question 1 Soit $e_i = (\delta_{ik})_{k\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $T : \ell_1 \to \ell_1$ une application linéaire. Montrer que T est continu si et seulement si $\sup_n \|T(e_n)\|_{\ell_1} < \infty$ et que, dans ce cas,

$$\|T\|_{\mathscr{L}(\ell_1)} = \sup_n \|Te_n\|_{\ell_1}.$$

Pensez à bien justifier chaque étape de votre raisonnement.

Question 2 Soit $e_i = (\delta_{ik})_{k\geq 0} \in \ell_2$ et T l'opérateur linéaire donné sur ℓ_2 par
(a) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad T(e_n) = e_{n+1}$
(b) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad T(e_n) = \arctan(n)e_n$
(c) $T(e_0) = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}: \quad T(e_{n+1}) = e_n$
(d) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad T(e_n) = e_1$

Pour chacun des ces quatre cas,
(A) expliciter Tx pour $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots) \in \ell_2$ avec $N \geq 1$.
(B) déterminer si oui ou non, T est continue sur ℓ_2. Justifier vos réponses.
(C) calculer la norme de l'opérateur T, le cas échéant.

Question 3 Soit $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
(a) Montrer que toute suite $(y_n) \in \ell_q$ définit une fonctionnelle linéaire continue $\varphi \in (\ell_p)'$ via $\varphi((x_n)) = \sum x_n y_n$.
(b) Montrer inversement que toute fonctionnelle linéaire continue $\varphi \in (\ell_p)'$ est de cette forme pour une certaine suite $(y_n) \in \ell_q$ à expliciter.
Indications: comment agit φ sur une suite finie? D'où vient alors la suite (y_n)? montrer que les suites finies sont denses ....

Question 4 Soit $X = \mathcal{C}([0, 2\pi])$ muni de la norme sup $\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|$ et

$$K = \left\{ f \in \mathcal{C}([0, 2\pi]) : \; \|f\|_\infty + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq 1 \right\}$$

Montrer que K est équicontinue, et compact dans X.

Question 5 Soit φ une fonction non nulle de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ à support compact.
(a) Montrer que $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
(b) On pose $\varphi_n(x) := 2^{-n}\varphi(nx)$. Calculer la limite simple de la suite $\varphi_n(x)$ lorsque $n \to \infty$.
(c) Rappeler la notion de convergence dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.
(d) Est-ce que (φ_n) converge dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$?

Question 6
(a) Soit $f_n(x) = \left(\cos(\frac{x}{\sqrt{n}})\right)^n$. Montrer que $\langle T_n, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f_n(x)\, dx$ définit une distribution tempéré sur $\mathbb{R}$.
(b) Par un développement limité adapté, calculer la limite simple $f(x)$ de la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$ lorsque $n \to \infty$.
(c) Rappeler la notion de convergence sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.
(d) Est-ce que (T_n) converge dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$?

Question 7 Rappeler la définition de la dérivée d'une distribution tempérée. Soit $f(x) = e^{-|x|}$.
(a) Montrer $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.
(b) Calculer T_f' et T_f''.
(c) Calculer les transformations de Fourier de T_f de T_f' et T_f''.