Projet Devoir surveillé, Durée 1h20 mn

Question de Cours : Énoncer un théorème de comparaison *Séries- Intégrales*.

On considère l'intégrale de Wallis $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx, \quad n \in \mathbb{N}$.

1.a Montrer que I_n existe et que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée.

1.b Montrer que pour tout $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$:

$$0 < I_n < \epsilon + \frac{\pi}{2}\cos^n \epsilon.$$

1.c En déduire que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour ≥ 2 :

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}.$$

3. En déduire que

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}, \quad I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4. Montrer que

$$(2n+1)\, I_{2n+1}I_{2n} = 2n\, I_{2n}I_{2n-1} = \cdots I_1I_0 = \frac{\pi}{2}.$$

5. En déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, $n \to +\infty$.

6. Montrer que, lorsque t réel tend vers $+\infty$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^t x dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2t}}.$$

7. À l'aide de la série de terme général $a_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|^x\, dx$, montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} |\sin x|^x\, dx$ est divergente.

8. On pose pour tout $n \geq 1$, $u_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\log n - n - \log n!$ et

$$v_n = u_{n+1} - u_n.$$

8.a Montrer l'équivalence $v_n \sim \dfrac{1}{12n^2}$.

8.b En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

9. Établir l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \sim Cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}.$$

10. En utilisant **4.**, montrer que

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}.$$

Fin