université de BORDEAUX

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2015 / 2016
DEUXIÈME SESSION

Collège Sciences et technologies

Licence 2, analyse 3
Durée : 3h00
Documents : non autorisés
La calculatrice homologuée est le seul matériel électronique autorisé.

Version B

Pour les questions à choix multiples, il *une ou plusieurs* réponses sont correctes. Toute proposition justement cochée donnera $+1$ point, toute proposition non cochée donnera zero points et toute proposition cochée par erreur donnera -1 points. La somme des points par question à choix multiples ne pouvant être négative, elle sera compté comme nulle si le nombre d'erreurs dépasse le nombre de réponses correctes. **Il est donc vivement déconseillé de cocher "au hasard" sans être sûr de la réponse.** Le nombre de points obtenus est ensuite pondéré avec le barème indiqué.

Numéro d'anonymat

Question 1 *(Barème indicatif: 1.5 points)* A l'aide d'un changement de variables, étudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin(e^x)\,dx$.

Question 2 *(Barème indicatif: 1.5 points)* Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \sin(e^x)\,dx$ converge comme intégrale impropre.

Numéro d'anonymat

Question 3 *(Barème indicatif: 1 point)* Quelle est la valeur de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^n}$

☐ 1	☐ 3	☐ 4
☐ 7	☐ 12	☐ la série diverge

Question 4 *(Barème indicatif: 1 point)* Soit $p > 1$. Lesquelles des assertions suivantes sont **nécessairement** vraies?

- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-1}}$ converge
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$ diverge

Question 5 *(Barème indicatif: 1 point)* Existe-t-il une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à termes non nuls, telle que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ convergent simultanément? Si oui, en expliciter une, si non, justifier votre raisonnement.

Question 6 *(Barème indicatif: 2 points)* Lesquelles des séries suivantes convergent?

- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$

Justifier **brièvement** vos réponses.

Numéro d'anonymat

Question 7 *(Barème indicatif: 2 points)* Lesquelles des séries suivantes convergent?

- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n+2}$
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n(n+2)}$
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n+2}$

Justifier **brièvement** vos réponses.

Question 8 *(Barème indicatif: 1.5 points)* Pour quelles valeurs $k \in \mathbb{N}^*$ les deux séries convergent-elles simultanément

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{kn}}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{k}{4}\right)^n$$

☐ 1	☐ 2	☐ 3
☐ 4	☐ 5	☐ 6

Question 9 *(Barème indicatif: 1 point)* Donner un exemple d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ qui converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et telle que $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 10 *(Barème indicatif: 1.5 points)* Lesquelles des séries entières suivantes ont un rayon de convergence $R = 1$?

- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{3n+1}$
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot x^n$
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$
- ☐ $\sum_{n=1}^{\infty} n! \cdot x^n$

Numéro d'anonymat

Question 11 *(Barème indicatif: $0.5 + 1 + 1$ points)* Soit $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$. Déterminer, si elle existe, pour $x > 0$ la limite simple $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

La convergence de f_n vers f est elle

- ☐ uniforme sur $[a, b]$ pour tout $0 < a < b < 1$?
- ☐ uniforme sur $[a, b]$ pour tout $1 < a < b < \infty$?
- ☐ uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$?

Justifier la réponse **brièvement**.

Question 12 *(Barème indicatif: 1 point)* Sous quelles conditions la série $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$ converge-t-elle nécessairement? (donner une **seule** réponse, s.v.p)

- ☐ Pour tout x tel que $-3 < x < -1$.
- ☐ Pour tout x tel que $-3 \leq x < -1$.
- ☐ Pour tout x tel que $-3 \leq x \leq -1$.
- ☐ Pour tout x tel que $-1 < x < 1$.
- ☐ Pour tout x tel que $-1 \leq x \leq 1$.

Question 13 *(Barème indicatif: 1 point)* Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x^2+1}\right)^n$ et $a > 1$. Lesquelles des assertions suivantes sont vraies?

- ☐ La série converge simplement sur $(1, \infty)$ mais pas uniformément.
- ☐ La série converge uniformément sur $(1, \infty)$ mais pas normalement.
- ☐ La série converge normalement sur $(1, \infty)$.
- ☐ La série converge simplement sur (a, ∞) mais pas uniformément.
- ☐ La série converge uniformément sur (a, ∞) mais pas normalement.
- ☐ La série converge normalement sur (a, ∞).

Numéro d'anonymat

Question 14 *(Barème indicatif:* $0.5+0.5+1+0.5$ *points)* Soit $f(x)=\max(0,\sin(x))$. Calculer le coefficient de Fourier complexe c_0 de f.

En écrivant $\sin(x)=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$, calculer le coefficient de Fourier complexe c_1 de f.

Il sera admis que $c_{-1}=-c_1$. Pour $|n|>1$, calculer les coefficients de Fourier complexes c_n de f.

Quelle est la série de Fourier de f

- ☐ $f(x)=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{\sin(x)}{2}-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$
- ☐ $f(x)=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{\sin(x)}{2}-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos((2n+1)x)}{n^2+n}$
- ☐ $f(x)=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{\cos(x)}{2}-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2nx)}{4n^2-1}$
- ☐ $f(x)=\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{\cos(x)}{2}-\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin((2n+1)x)}{n^2+n}$

— FIN —