Université Bordeaux1, 2012-2013. Analyse 3.

Devoir Maison (à rendre la semaine du 15 Avril).

Exercice 1 : On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq n \quad \text{et} \quad f_n(x) = 0 \quad \text{si} \quad x > n.$$

1) Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2) On pose $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$, $x \geq 0$. Montrer que pour $x \in [0,n]$, $g_n'(x) = e^{-x}h_n(x)$, où h_n est une fonction admettant un seul zéro sur l'intervalle $]0,n[$.
3) En déduire que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,+\infty[$.

Exercice 2 : Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.
1) Déterminer le domaine sur lequel f converge simplement.
2) Montrer que f est continue sur $I = [-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.
3) Montrer que la dérivée de la fonction $\varphi\ :\ ]0,1[\to \mathbb{R}$, $x \to f(x) + f(1-x)$ est $\varphi'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln x}{1-x}$.
4) Montrer que l'on a l'équation fonctionnelle $f(x)+f(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x)\ln x$ pour $x \in]0,1[$.
(On admettra que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$).
5) En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$.

Exercice 3 :
1) Vérifier que la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\cos^n(x)\sin(nx)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $f(x)$ sa valeur. On pose $u_n(x) = \frac{1}{n}\cos^n(x)\sin(nx)$.
2) Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, \pi - a]$ pour tout $a \in]0, \pi/2[$. Que peut-on déduire sur f.
3) Montrer que $\sum u_n'$ converge uniformément sur $[a, \pi - a]$ pour tout $a \in]0, \pi/2[$. Que peut-on en déduire sur f.
4) Montrer que $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos^{n-1}(x)\cos((n+1)x)$, puis que $f'(x) = \Re\left(\frac{e^{2ix}}{1-e^{ix}\cos x}\right)$. On précisera les valeurs de x pour lesquels on a obtenu ce résultat.
5) Simplifier cette expression et en déduire une autre expression de f.