Corrigé DM analyse 3

1) $f_n(x) = e^{n \cdot \ln(1-\frac{x}{n})}$.

$$n \cdot \ln\left(1-\frac{x}{n}\right) = \underbrace{\frac{\ln(1-\frac{x}{n}) - \ln(1)}{1-\frac{x}{n} - 1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \ln'(1)=1} \cdot (-x).$$

par déf. de la dérivée.

2) $g_n(x) = e^{-x} - (1-\frac{x}{n})^n$

$g_n'(x) = -e^{-x} + (1-\frac{x}{n})^{n-1} = e^{-x}\Big(\underbrace{-1 + e^{x}(1-\frac{x}{n})^{n-1}}_{=:\, h_n(x)}\Big)$

$$h_n'(x) = \frac{1-x}{n} \underbrace{e^{x}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-2}}_{>0 \text{ sur } (0,n)}.$$

$\rightsquigarrow$ h_n croît sur $(0,1]$ de 0 vers $h_n(1)$

et décroît sur $[1,n)$ vers -1.

$\Rightarrow \exists!\ x_n \in (1,n) : h_n(x_n) = 0.$

Ainsi,

x	0		x_n		n
g_n'		$+$		$-$	
g_n	0	$\nearrow$	$g_n(x_n)$	$\searrow$	e^{-n}

3) On voit $g_n \geq 0$ et $\sup_{x\in(0,n)} |g_n(x)| = g_n(x_n)$.

Or $h_n(x_n) = 0$, autrement dit

$$e^{-x_n} = \left(1-\frac{x_n}{n}\right)^{n-1}, \quad \text{on a}$$

$$g_n(x_n) = e^{-x_n} - \left(1-\frac{x_n}{n}\right)^n = e^{-x_n}\left(1-\left(1-\frac{x_n}{n}\right)\right) = \frac{x_n}{n}e^{-x_n} \leq \frac{1}{n}$$

(1-3): il en suit que $\sup_{x>0} |g_n(x)|$

$$= \max\left\{ \sup_{(0,n)} g_n(x) \,,\ \sup_{x\geq n} |g_n(x)| \right\}$$

$$\leq \max\left(\frac{1}{n}, e^{-n} \right) \longrightarrow 0$$

(on rappelle que $f_n(x) = 0$ pour $x \geq n$).

Exercice 2.

a) Pour $|x| \leq 1$ la convergence est normale car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

Pour $|x| > 1$ la série diverge (son terme général div. même).

b) $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$ est continue, la conv. est normale donc uniforme sur $[-1,1]$ $\Rightarrow$ $f(x)$ continue.

Pour tout $n \geq 1$, $f_n \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ (polynôme!)

$f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{n}$. La série $\sum f_n'(x)$ converge normalement sur $\{|x| \leq R\}$ pour tout $R < 1$

$\Rightarrow$ $f \in \mathcal{C}^1([-R,R])$ pour tout $R < 1$.

$\Rightarrow$ $f \in \mathcal{C}^1((-1,1))$.

Rem: la conv. n'est pas uniforme $[-1,1]$!

c) $\varphi(x) = f(x) + f(1-x)$ est dérivable sur $(0,1)$.

$\varphi'(x) = f'(x) - f'(1-x)$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{x^{n-1}}{n} - \sum_{n\geq 1} \frac{(1-x)^{n-1}}{n} = \frac{1}{x}\ln(1-x) - \frac{1}{1-x}\ln(x).$$

2d) Soit $\psi(x) = + \ln(x)\ln(1-x)$.

$$\psi'(x) = + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x) = c + \psi(x).$$

Or $\lim\limits_{x \to 0+} \psi(x) = 0$ (p.ex. par la règle de l'Hôpital) :

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{-1}{x(\ln(x))^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{x(\ln(x))^2}{1-x} = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(0) = f(0) + f(1) = c \quad \Rightarrow \quad c = \sum \frac{1}{n^2}.$$

e) $x = \frac{1}{2}$: $\varphi(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{6} - (\ln(2))^2$, soit

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n \cdot n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}(\ln(2))^2.$$

Ex 3 a) Si $x \in \pi\mathbb{Z}$, $f_n(x) = 0$. Sinon, $\underbrace{|\cos(x)|}_{=:q} < 1$

et $|f_n(x)| \leq \frac{q^n}{n}$, on a donc convergence $\forall x$.

b) Même argument : sur $[a, \pi - a]$, $|\cos(x)| \leq q < 1$

(en fait $q = \cos(a)$ convient)

On a donc convergence normale car $\|f_n\|_{L^\infty(a, \pi-a)} \leq \frac{q^n}{n}$

Par conséquent,

$f(x) \in \mathcal{C}(a, \pi - a)$. $\forall a \in (0, \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \quad f(x) \in \mathcal{C}((0, \pi))$.

$$f_n'(x) = -\cos(x)^{n-1}\sin(x)\sin(nx) + \cos(x)^n \cdot \cos(nx).$$

$$= \cos(x)^{n-1}\cos((n+1)x).$$

Pour $x \in [a, \pi - a]$, $|f_n'(x)| \leq q^{n-1}$ avec $q = \cos(a) < 1$.

$\Rightarrow$ on a convergence normale de $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ sur $[a, \pi-a]$

et $f(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1((0,\pi))$ et

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(x)^{n-1}\cos((n+1)x)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\sum_{n\geq 1}^{\infty} \cos(x)^{n-1} e^{i(n+1)x}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{n\geq 1}^{\infty} \left(\cos(x)\cdot e^{ix}\right)^{n-1} \cdot e^{2ix}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2ix}}{1-\cos(x)e^{ix}}\right). \qquad (x \in (0,\pi)).$$

Par périodicité, le résultat s'étend à $\mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z})$.

Finalement, $$f'(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2ix}\left(1-\cos(x)e^{-ix}\right)}{\left(1-\cos^2(x)\right)^2 + \cos^2(x)\sin^2(x)}\right)$$

$$= \left(\frac{\cos(2x) - \cos^2(x)}{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x + \cos^2(x)\left(1-\cos^2(x)\right)}\right)$$

$$= \frac{-\sin^2(x)}{1-\cos^2(x)} = -1$$

$\Rightarrow$ $f(x) = -x + C$. $\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$.

finalement $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ $\blacksquare$