Déterminants.

$v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$.

$V =$ parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_n$

$= \{ b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_n v_n : \quad 0 \leq b_i \leq 1 \}$.

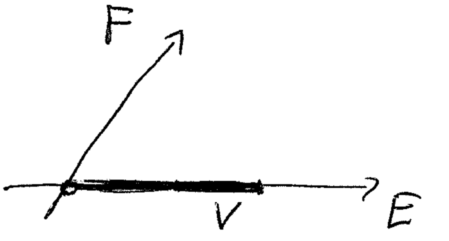
$A = (v_1 | v_2 | \dots | v_n)$ matrice $n \times n$.

$$\boxed{\det(A) := \text{volume}(V).}$$

Volumes :
- positifs
- $A \subset B \Rightarrow \text{vol}(A) \leq \text{vol}(B)$
- $(A_n)_{n \geq 1}$ ensembles. $\text{vol}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(A_n)$

On observe : si $v_1, \dots, v_n$ sont liés, il ex. sous-espace vector. E de dim $\leq (n-1)$ t.q. $V \subset E$.

$E \oplus F = \mathbb{R}^n$.

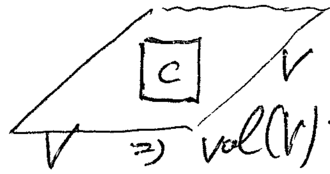


V peut-être contenu dans $\underset{E}{B}(0, R) \times \underset{F}{B}(0, \varepsilon)$ dont le volume est $\pi R^d \cdot \pi \varepsilon^{n-d}$, $d = \dim(E) \leq n-1$.

$\Rightarrow 0 \leq \text{vol}(V) \leq \pi^2 R^d \varepsilon^{n-d} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$.

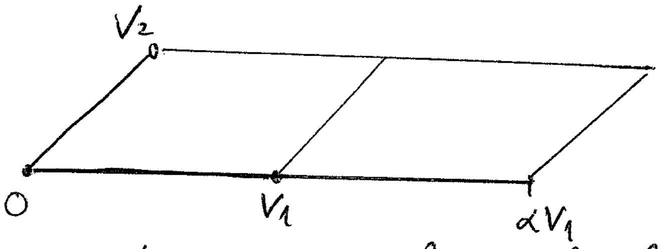
$\Rightarrow \text{vol}(V) = 0 \iff \det(A) = 0$.

Inversement, si $v_1, \dots, v_n$ libres, il existe un petit cube C de vol. > 0 inclus dans



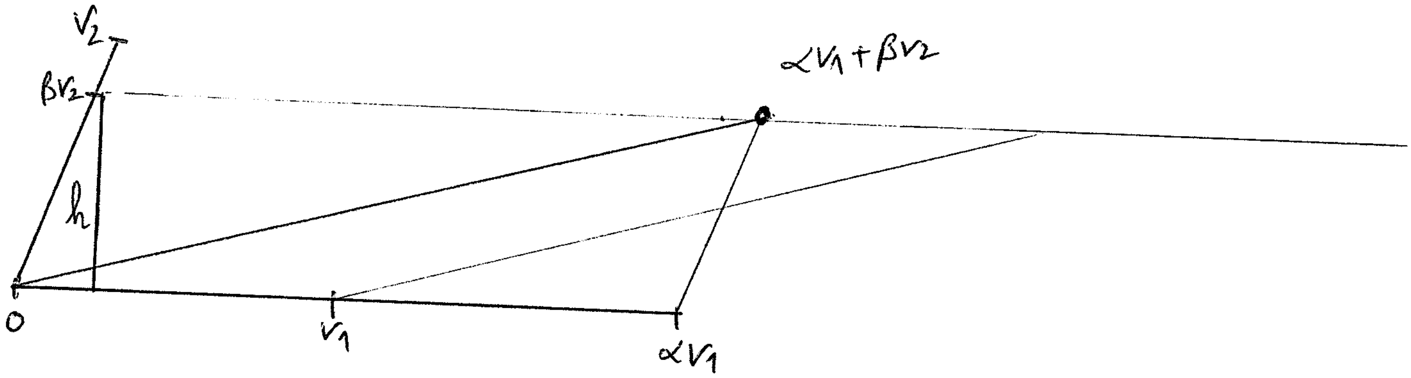
$V \Rightarrow \text{vol}(V) > 0$.

<u>Prop (1)</u> $\det(A) = 0$ <u>ssi</u> $(v_1, \dots, v_n)$ libres
<u>ssi</u> $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$.



$$\alpha \cdot \mathrm{vol}(v_1, v_2) = \mathrm{vol}(\alpha v_1, v_2).$$

Le déterminant sera donc compatible avec la multiplic. extérieure.



on observe que les parallélépipèds engendrés par v_1 et βv_2 et par v_1 et $\alpha v_1 + \beta v_2$ ont la même hauteur h – et donc le même volume.

(*) $$\Rightarrow \det(v_1, \alpha v_1 + \beta v_2) = \det(v_1, \beta v_2) = \beta \cdot \det(v_1, v_2).$$

Soit $x \in \mathbb{R}^2$. On peut écrire $x = \alpha v_1 + \beta v_2$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \det(v_1, x + v_2) &= \det(v_1, \alpha v_1 + (\beta+1) v_2) \\
&\overset{*}{=} \det(v_1, (\beta+1) v_2) = (\beta+1) \det(v_1, v_2) \\
&= \det(v_1, v_2) + \beta \cdot \det(v_1, v_2) \\
&= \det(v_1, v_2) + \det(v_1, \beta v_2) \\
&\overset{*}{=} \det(v_1, v_2) + \det(v_1, \underbrace{\alpha v_1 + \beta v_2}_{x}).
\end{aligned}$$

Ainsi, le déterminant est <u>additif</u>.

<u>Prop 2</u> : Le déterminant est <u>linéaire</u> dans chaque "variable"

Puisque $\det(v_1, v_2, v_3, \ldots)$

$\overset{*}{=} \det(v_1 - v_2, v_2, v_3, \ldots)$

$\overset{*}{=} \det(v_1 - v_2, \underbrace{v_2 + (v_1 - v_2)}_{v_1}, v_3, \ldots)$

$\overset{*}{=} \det(\underbrace{(v_1 - v_2) - v_1}_{-v_2}, v_1, v_3, \ldots)$

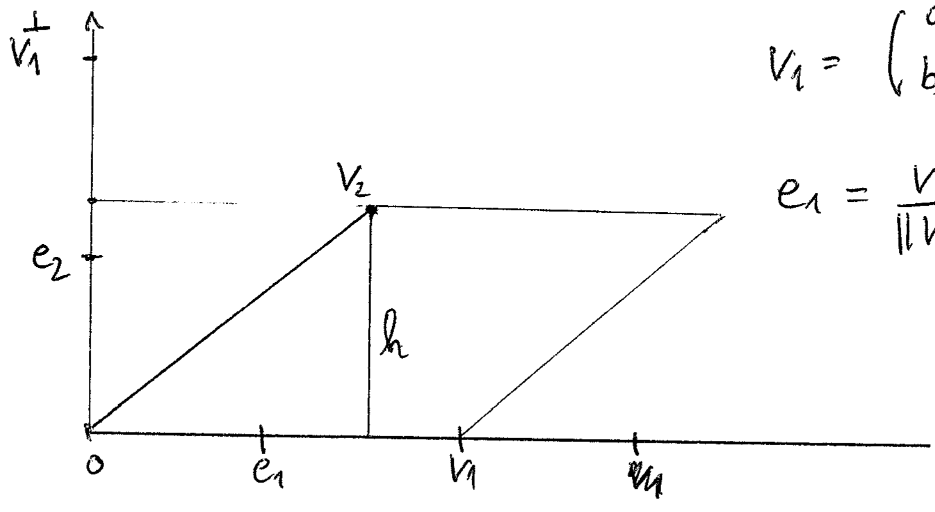
$= -\det(v_2, v_1, v_3, \ldots)$

on voit que échanger 2 vecteurs dans le déterminant change le signe.

<u>Prop 3</u> $\det(e_1 | \ldots | e_n) = 1$ pour la base std.

car $V = [0,1]^n$ est de volume 1.

$\boxed{\mathbb{R}^2}$



$v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. $v_1^\perp = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, $e_2 = \frac{v_1^\perp}{\|v_1^\perp\|}$

aire $= h \cdot \|v_1\|$.

mais $h = \| \underbrace{(v_2 | e_2) \cdot e_2}_{\text{proj. de } v_2 \text{ sur } v_1^\perp} \| = (v_2 | v_1^\perp) \cdot v_1^\perp \cdot \frac{1}{\|v_1^\perp\|^2}$ ~~~~

Ainsi

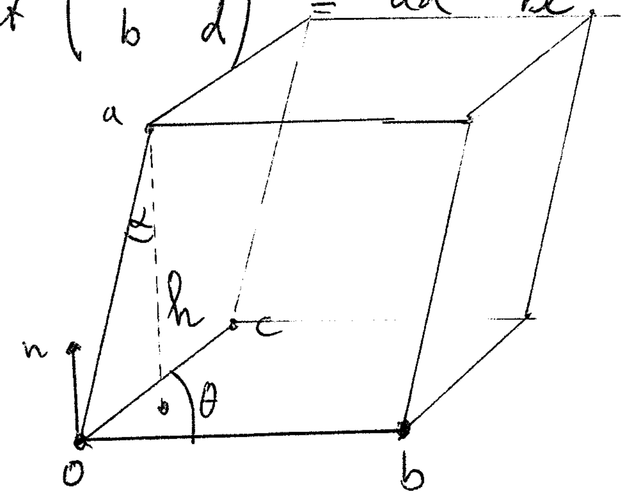
$$|\det(v_1,v_2)| = \text{aire} = \underbrace{|(v_2|v_1^\perp)| \cdot \|v_1^\perp\| \cdot \frac{1}{\|v_1^\perp\|^2}}_{h} \cdot \|v_1\|$$

$$= |(v_2|v_1^\perp)| = \left|\left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}\right)\right|$$

$$= \underline{\underline{|ad-bc|}}.$$

On a (signe via $\det\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=1$)

$$\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$



$\underline{\underline{n=3}}$

Sachant $b \wedge c = \|b\| \cdot \|c\| \cdot \sin(\theta) \cdot n$

on a $(a | b \wedge c)$

$$= (a|n) \cdot \underbrace{\|b\| \cdot \|c\| \cdot \sin(\theta)}_{\text{aire du parallelogramme engendré par } b \text{ et } c}$$

$$= \underbrace{\|a\| \cdot \underbrace{\|n\|}_{=1} \cdot \cos(\alpha)}_{=h!} \cdot \text{Aire}(b,c)$$

$$= \text{"}\mathrm{vol}(a,b,c)\text{"} = \det(a,b,c).$$

En explicitant $b \wedge c$, on tombe sur le règle de Sarrus!

$$\det \begin{vmatrix} a & x & s \\ b & y & t \\ c & z & u \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{ccccc} + & + & +- & - & - \\ a & x & s & a & x \\ b & y & t & b & y \\ c & z & u & c & z \end{array}$$

De façon générale, si $A = (v_1 | \cdots | v_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$,

$$\det(A) = \det\left(\sum_{j=1}^{n} a_{j1} e_j, v_2, v_3, \ldots, v_n\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{j1} \det(e_j, v_2, v_3, \ldots, v_n) \quad \text{par linéarité}$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} a_{j_1,1}\, a_{j_2,2} \cdots a_{j_n,n} \cdot \det(e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_n})$$

Il y a n^n termes, dont beaucoup de nuls.

Seulement non-nul sont les permutations de $(e_1, \ldots, e_n)$

$$\Rightarrow \det(A) = \sum_{\substack{\sigma \text{ permut.} \\ \text{de } [\![1,n]\!]}} a_{\sigma(1),1}\, a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \underbrace{\det(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})}_{= \operatorname{sign}(\sigma)}$$

en ordonnant cette somme par $(a_{\sigma(k)}, k)$

on obtient le développement du déterminant suivant une colonne: $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} D_{ik}$.