Un théorème de Borel sur les fonctions de classe C^∞

Exercice 1 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existent des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infiniment dérivables et telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad f^{(n)}(0) = a_n.$$

(a) En utilisant une fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 dans un voisinage de 0, résoudre le problème dans le cas que la série entière $\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence non nul.

(b) Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ à support inclus dans $[-1, 1]$ et égale à 1 sur $[-1/2; 1/2]$. On pose, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \tfrac{a_n}{n!} x^n \phi(x) \qquad \text{et} \qquad M_n = \sup\{|f_n^{(k)}(x)| : \ x \in \mathbb{R}, k < n\}.$$

On définit une suite λ_n par $\lambda_n = \max(2, 2^n M_n)$ et pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \lambda_n^{-n} f_n(\lambda_n x) = \sum_{n=0}^\infty \tfrac{a_n}{n!} x^n \phi(\lambda_n x).$$

Montrer que la série définissant f converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

(c) Montrer que la série des dérivés k-ièmes de $\lambda_n^{-n} f_n(\lambda_n x)$ converge uniformément en $x \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé.

(d) Déduire que f est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ et calculer $f^{(k)}(0)$.

(e) Est-il toujours possible d'obtenir une fonction vérifiant la même propriété si on demande que f soit entière?

Convolutions et l'existence de fonctions de test

Exercice 2 Soient f, g des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^n$. Démontrez que

$$\operatorname{supp}(f * g) \ \subseteq \ \overline{\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)} = \overline{\{s + t : \ s \in \operatorname{supp}(f), t \in \operatorname{supp}(g)\}}.$$

Exercice 3 Soient $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\omega_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnés par

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \le 0 \end{cases} \qquad \omega(x) = \tfrac{1}{a}\, \psi(1 - |x|^2) \qquad \omega_\varepsilon(x) = \tfrac{1}{\varepsilon^n} \omega(x/\varepsilon)$$

où $a = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(1 - |x|^2)\, dx$.

(a) Démontrer que $\|\omega_\varepsilon\|_{L^1} = 1$ pour tout $\varepsilon > 0$.

(b) Démontrer par récurrence que $\psi^{(n)}(t) = P_{2n}(1/t)e^{-1/t}$, $t > 0$ où P_k est un polynôme de dégrée k. En déduire que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et que ω, $\omega_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(c) Pour un ensemble non-vide $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on pose $A^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \ d(x, A) < \varepsilon\}$. Pourquoi est la fonction $\mathbb{1}_{A^\varepsilon}$ mesurable pour tout $\varepsilon > 0$?

(d) On pose $\eta_\varepsilon = \mathbb{1}_{A^{2\varepsilon}} * \omega_\varepsilon$. Démontrer que

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \ 0 \leq \eta_\varepsilon(x) \leq 1$

(ii) $\forall x \in A^\varepsilon : \ \eta_\varepsilon(x) = 1$

(iii) $\forall x \notin A^{3\varepsilon} : \ \eta_\varepsilon(x) = 0$

(e) Démontrer qu'il existe une constante $K_{n,\alpha} > 0$ qui ne dépend que de la dimension et du multi-index $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\partial^\alpha \eta_\varepsilon| \leq K_{n,\alpha}\varepsilon^{-|\alpha|}$.

Convolution et approximations

Exercice 4 Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

(a) Démontrer que $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

(b) En déduire que $\|f * \omega_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$.

Indication: en cas $1 < p < \infty$ on pourra multiplier $f * g$ par une fonction $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1/p + 1/q = 1$ et utiliser ensuite l'inégalité de Hölder.

Exercice 5 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^1(\Omega)$. On suppose que $f = 0$ en dehors d'un compact $K \subset\subset \Omega$.

(a) Montrer que $\mathrm{dist}(K, \partial\Omega) = \inf_{x \in K, y \in \partial\Omega} |x - y| > 0$.

(b) Montrer que si $\varepsilon < \mathrm{dist}(K, \partial\Omega)$, $f_\varepsilon = f * \omega_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

(c) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ on a $f_\varepsilon \to f$ uniformément dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ si $\varepsilon \to 0+$.

(d) Montrer que $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$.

(e) Déduire de (c) et (d) que pour tout $f \in L_c^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$ on a $f_\varepsilon \to f$ dans la norme de $L^p(\Omega)$.

Partition de l'unité

Exercice 6 Construire une fonction $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tel que

(a) $0 \leq \phi(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\mathrm{supp}(\phi) \subseteq [-1/3, 4/3]$

(c) $\phi|_{[1/3, 2/3]} \equiv 1$

(d) $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(x - n) = 1.$

Indication: construire ϕ à base d'une fonction ϕ_0 qui satisfait (a), (b) et (c) en modifiant les valeurs de ϕ_0 convenablement sur l'intervalle $[-1/3, 1/3]$.