Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Ω un ensemble et $A_1, \dots, A_n$ une partition de Ω, i.e.

$$\forall i \neq j : \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \ \ (\text{mais } \ A_i, A_j \neq \emptyset), \qquad \text{et} \qquad \Omega = \bigcup A_j.$$

Soit $\sigma(\mathcal{F})$ la tribu engendrée par $\mathcal{F}$. Déterminer la composition et le cardinal de $\sigma(\{A_1, \dots, A_n\})$.
Soit $\mathcal{A}$ la famille de tous les réunions d'éléments de $\{A_1, \dots, A_n\}$. On voit que le complément d'un élément de $\mathcal{A}$ est un élément de $\mathcal{A}$ car $(A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots A_{i_k})^{\complement} = (A_{j_1} \cup A_{j_2} \cup \dots A_{j_\ell})$ si $\{j_1, j_2, \dots, j_\ell\} = \{1, 2, \cdots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$. Donc $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$. Et l'application $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\})$ définie par

$$\phi(A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots A_{i_k}) = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$$

est une bijection de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{P}\{1, 2, \dots, n\}$. Donc card($\mathcal{A}$) = card($\mathcal{P}\{1, 2, \dots, n\}$) $= 2^n$.

Exercice 2 Soit $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = \{[n, +\infty) : \ n \in \mathbb{N}\} \subset \Omega$. Soit $\sigma(\mathcal{F})$ la tribu engendrée par $\mathcal{F}$. Déterminer $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathcal{F}_x = \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$. Déterminer, pour x fixe:

$$\bigcap_{A \in \mathcal{F}_x} A.$$

On voit que $\forall_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1[= [n, +\infty[\setminus [n+1, +\infty[$ et alors $\forall_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1[\in \mathcal{A}$. On pose $\mathcal{T} = \{[n, n+1[: n \in \mathbb{N}\} \cup]-\infty, 0[$. Alors, si $\mathcal{B}$ est égal à tous les réunions dénombrables d'éléments de $\mathcal{T}$ alors $\mathcal{B}$ est une tribu qui contient $\mathcal{T}$. Il est évident que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$. De plus, les réunions dénombrables d'éléments de $\mathcal{T}$ ainsi que les compléments se traitent comme en exercice 1, c.à.d., le complément d'une réunion dénombrable $\cup_{n \in S} [n, n+1[$ est égal à $(\cup_{n \in \mathbb{N} \setminus S} [n, n+1[) \cup]-\infty, 0[$ et le complément de $\cup_{n \in S} [n, n+1[\cup]-\infty, 0[$ est égal à $(\cup_{n \in \mathbb{N} \setminus S} [n, n+1[)$. cB est donc une tribu. Toute tribu qui contient $\mathcal{F}$ contiendra $\mathcal{T}$ et finalement $\mathcal{B}$. Donc $\mathcal{B}$ est bien la plus petite tribu que contient $\mathcal{F}$ et on a bien $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F}). = \mathcal{B}$

Exercice 3 (mesurable vs. négligeable) Soit Ω un ensemble avec au moins trois éléments.

a) On pose $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$. Soit δ_a la mesure de Dirac sur $\mathscr{A}$ et μ_d la mesure de dénombrement sur $\mathscr{A}$.

1. Quels sont les ensembles négligeables de $(\Omega, \mathscr{A}, \delta_a)$?
   Tout ensemble qui ne contient pas a, car $a \notin A$ ssi $\delta_a(A) = 0$
2. Quels sont les ensembles négligeables de $(\Omega, \mathscr{A}, \mu_d)$?
   Seul l'ensemble vide satisfait $\mu_d(A) = 0$

b) Soit $a \in \Omega$ et $\mathscr{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a\}^{\complement}, \Omega\}$. Donner un exemple d'une partie négligeable de $(\Omega, \mathscr{T}, \delta_a)$ qui soit non mesurable.
Tout sous-ensemble propre de $\Omega \setminus \{a\}$. a cette propriété

c) Dans $(\mathbb{R}, \sigma_{Borel}, \nu)$, ou ν est la mesure de Lebesgue, montrer que tout ensemble négligeable est d'intérieur vide. *Un ensemble qui n'est pas d'intérieur vide contient un intervalle* $]a, b[$ *et donc est de mesure plus grand que ou égale à* $b - a$. *Par conséquent, si un ensemble* N *contenant* $]a, b[$ *est contenu dans un ensemble Borelien, ce dernier est de mesure positive. On conclut par contraposé.*

d) Trouver une partie de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide qui n'est pas négligeable par rapport à la mesure de Lebesgue.
Par exemple $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 4* (Les tribus infinis sont non–dénombrables!) Soit Ω un ensemble non-vide et $\mathscr{T}$ une tribu sur Ω. Pour $x \in \Omega$, on définit

$$\mathcal{F}_x := \{T \in \mathscr{T} \, : \, x \in T\} \qquad \text{et} \qquad [x] := \bigcap_{F \in \mathcal{F}_x} F.$$

a) Montrer que $x \notin [y]$ implique $y \notin [x]$. En déduire que $x \sim y$ si $x \in [y]$ est une relation d'équivalence sur Ω.
Si $x \notin [y]$ *alors il existe* $A \in \mathcal{T}$ *tel que* $x \notin A$ *et* $y \in A$. *Observons que* $A^{\complement} \in \mathcal{T}$ *satisfait* $y \notin A^{\complement}$ *et* $y \in A^{\complement}$ *ce qui montre que* $y \notin [x]$. *Donc* $x \in [y] \implies [x] = [y]$ *ce qui implique que* $\sim$ *est une relation d'équivalence. En effet, la symétrie est la contraposé de la première question, la reflexivité est évidente, et* $x \in [y]$ *se traduisant en* $y \in F$ *et* $F \in \mathscr{T}$ *implique* $x \in F$ *et* $F \in \mathscr{T}$, *la transitivité est immédiate aussi.*

b) Montrer que $\mathcal{P} = \{[x] \, : \, x \in \Omega\}$ est une partition de Ω.
C'est la partition qui est engendrée par la relation $\sim$. *Il est facile de voir que* $[x] \neq [y]$ *implique* $[x] \cap [y] = \emptyset$, *p.ex. par la transitivité de* $\sim$

c) Soit $T \in \mathscr{T}$. Montrer que $T = \bigcup_{x \in T}[x]$.
Il est clair que $T \subseteq \bigcup_{x \in T}[x]$. *Par définition de* $[x]$, *si* $x \in T$ *alors* $T \in \mathcal{F}_x$ *et donc* $[x] = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_x} F \subseteq T$. *On déduit* $\bigcup_{x \in T}[x] \subseteq T$.

d) Montrer que $\mathcal{P}$ est infinie si $\mathscr{T}$ est infinie.
Par exercice 1, si $|\mathcal{P}| = n$ *alors* $|\mathscr{T}| = 2^n < \infty$. *Donc,* $|\mathcal{P}|$ *est nécessairement infinie.*

e) Soit $\mathcal{P}$ infinie. Montrer (par l'absurde) que $\mathscr{T}$ est indénombrable. *Argumentons par l'absurde: supposons que* $\mathscr{T}$ *est dénombrable*

1. Montrer que si $\mathscr{T}$ est dénombrable, alors $[x] \in \mathscr{T}$ pour tout $x \in \Omega$. Déduire que $\mathcal{P}$ est dénombrable.
Car $\mathscr{T}$ *est dénombrable, alors* $[x]$ *est une intersection dénombrable d'éléments de* $\mathcal{T}$ *et donc dans* $\mathcal{T}$. *Mais cela implique que* $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$ *; rappelons qu'un sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.*

2. Soit $(P_n)_{n \geq 0}$ une énumération de $\mathcal{P}$. S'en servir pour construire une bijection $\phi : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \sigma(\{P_n \, : \, n \in \mathbb{N}\}) \subset \mathscr{T}$. Conclure
On définit $\phi(S) = \cup_{k \in S} P_n$. *Alors* ϕ *est une injection de l'ensemble* $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ *dans* $\mathscr{T}$. *Donc,* $\mathscr{T}$ *contient un ensemble non–dénombrable; ainsi* $\mathscr{T}$ *est non–dénombrable ce qui contredit l'hypothèse.*