Université de Bordeaux
Master 1, EDP1.

Devoir surveillé
(durée 2h, documents non autorisés)

Exercice 1: Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
1) Rappeler l'inégalité de Poincaré pour les fonctions $u \in H_0^1(\Omega)$.
2) Cette inégalité est-elle vérifiée pour les fonctions $u \in H^1(\Omega)$?
3) Supposons de plus que Ω est régulier. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que l'inégalité

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \|u - \alpha\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

ait lieu pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

Exercice 2: 1) Rappeler le théorème de compacité de Rellich.
2) On considère l'ouvert borné de $\mathbb{R}$ donné par

$$\Omega = \cup_{n \geq 1} \left] \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} \right[.$$

On définit sur Ω la suite de fonctions suivantes:

$$u_n = 2^{\frac{n}{2}} \chi_{\left] \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} \right[}$$

où χ désigne la fonction indicatrice.
i) Calculer $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$.
ii) Montrer que $u_n \in H^1(\Omega)$ pour tout $n \geq 1$.
iii) Montrer que (u_n) admet une sous-suite extraite (u_{n_k}) qui converge faiblement vers 0 dans $H^1(\Omega)$.
iv) L'injection $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est-elle compacte ?

Exercice 3: On considère l'équation de la chaleur dans $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$(E) \begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \Delta u(t,x) = 0, \ t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ u(0) = f \end{cases}$$

avec une donnée initiale $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Rappelons que $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ (le laplacien).
1) Quelle équation obtient-on en prennant la tranformée de Fourier par rapport à la variable x ?
2) Résoudre la nouvelle équation ainsi obtenue.
3) Donner explicitement la solution de l'équation (E) en justifiant toutes les étapes.