Exercice 1 (1) cours, (2)(i): grace a la definition et Cauchy-Schwarz, on peut remplacer u par une suite (η_n) de $\mathcal{D}(\Omega)$. Mais alors, $\eta_n, \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ et on intègre (formellement) sur $\mathbb{R}^n$ et pas sur Ω. Observons qu'alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta_n(\tfrac{d}{dx_k}\varphi) = -\int_{\mathbb{R}^n} (\tfrac{d}{dx_k}\eta_n)\varphi$$

via Fubini et IPP dans la variable x_k. Par Cauchy-Schwarz, l'intégrale est donc majoré par $\|\frac{d}{dx_k}\eta_n\|_2\|\varphi\|_2$ et puisque $\eta_n \to u$ en norme H^1, $\|\frac{d}{dx_k}\eta_n\|_2 \leq C$. (ii) on refait le même argument car que $\eta_n \to \widetilde{u}$ en norme $H^1(\mathbb{R}^n)$! (iii) Trivialement $\widetilde{u} \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Or, $|\langle \nabla u|\varphi\rangle_{L_2(\mathbb{R}^n)}| \leq C\|\varphi\|_2$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on déduit la même inéaglité pour $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^n)$ par densité. Par Cauchy-Schwarz, $\widetilde{u}' \in L_2(\mathbb{R}^n)$, et donc $\widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 2 (1) cours, via la transformation de Fourier. (2) Non, pour $\alpha < 1/2$, et la fonction radiale donné par $f(r) = |\ln(r)|^\alpha \eta(r)$ où η est une fonction plateau du disque de rayon 1, a support dans le disque de rayon 2, on voit via passage en coordonnés polaires et "Bertrand" que f est dans $H^1(\mathbb{R}^2)$, mais non-borné à l'origine.

Exercice 3 (1) $v \cdot \nabla u = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ et donc $\mathcal{F}_x(v \cdot \nabla u(t,\cdot))(\xi) = -i \sum v_i \xi_i \widehat{u}(t,\xi)$. (2) calcul direct. (3) Si on note pour ξ fixé $y(t) = \widehat{u}(t,\xi)$, on a $y' = Ay$ où $A = iv \cdot \xi - |\xi|^4$ est une constante (par rapport à t). Par conséquent,

$$\widehat{u}(t,\xi) = \widehat{u}(0,\xi)e^{t(iv\cdot\xi - |\xi|^4)}.$$

On remarque $\widehat{u}(0,\xi) = \widehat{u}_0(\xi)$. (4) $|\widehat{u}(t,\xi)| = |\widehat{u}_0(\xi)|e^{-t|\xi|^4}$. Or $u_0 \in L_2$, $\widehat{u}_0 \in L_2$ et donc $|\widehat{u}(t,\xi)| \in L_1$ comme produite de deux fonctions L_2. Par Riemann-Lebesgue, $u = \mathcal{F}^{-1}\widehat{u}$ est dans C_0.

Exercice 4 (1) V est un espace pré-Hilbertien. Montrons qu'il est complet. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans V. Alors (f_n) est Cauchy dans H^1 et dans $L_2(mdx)$. Ainsi $f_n \to f$ dans H^1. Par le lemma de Fatou, $\int |f|^2 m = \int \liminf |f_n|^2 m \leq \liminf \int |f_n|^2 m$, et comme des suites de Cauchy sont bornés, $f \in L_2(mdx)$, donc $f \in V$. En écrivant

$$\|f - f_n\|_V^2 = \|f - f_n\|_{H^1}^2 + \|f - f_n\|_{L_2(mdx)}^2 \leq \|f - f_n\|_{H^1}^2 + \liminf_m \|f_m - f_n\|_{L_2(mdx)}^2$$

on voit que le premier terme estcontrollé par $\varepsilon/2$ si $n \geq N$ et le deuxième pareil pour $n, m \geq M$. En choisissant $n \geq max(N,M)$ on conclut que $f_n \to f$ dans V. L'inclusion est gratuite: evidemment $V \subset L_2$ en tant que ensemble. De plus, $\|f\|_2 \leq \|f\|_V$ donc $i : V \to L_2$ est linéaire et continu (de norme ≤ 1). (2) Par Cauchy-Schwarz $|a(u,v)| \leq \|\nabla u\|_2\|\nabla v\|_2 + \|\sqrt{m}u\|_2\|\sqrt{m}v\|_2 \leq 2\|u\|_V\|v\|_V$. Ainsi a est continue. D'autre part, $\|u\|_2^2 + a(u,u) = \int |\nabla u|^2 + m|u|^2 + |u|^2\,dx = \|u\|_V^2$. Par définition, a est donc quasi-coervive. (3) Pour tout $L \in H'$ il existe un unique $u \in V$ tel que $a(\varphi, u) = L(\varphi)$ pour tout $\varphi \in V$. (4) $u \in D(A)$ s'il existe $h \in H = L_2$ tel que $a(u,v) = \langle h, v\rangle_{L_2}$ pour tout $u \in V$. On pose $Au = h$, c'est à dire, on a $a(u,v) = \langle Au, v\rangle_{L_2}$. (5) $Au = -\Delta u + mu$ pour

$u \in D(A)$ (..détails manquent). (6) existence de $u \in D(A)$ via Lax-Milgram (..détails manquent). Une fois qu'on a $\lambda u + Au = f$, on déduit $\lambda \|u\|_2^2 + a(u,u) = \langle f, u \rangle$. Or $a(u,u) \geq 0$, on a via Cauchy-Schwarz

$$\lambda \|u\|_2^2 \leq \|f\|_2 \|u\|_2$$

et donc $\|u\|_2 \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_2$.