Université de Bordeaux
Master 1, EDP1.

Examen
(durée 3h, documents non autorisés)

Exercice 1:
Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$.
1) Rappeler les définitions des espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$.
2) Soit $u \in H_0^1(\Omega)$.
i) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$|\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}dx| \leq c\|\varphi\|_{L^2(\Omega)},\ k = 1, ..., N.$$

ii) Soit $\tilde{u}$ le prolongement de u par 0 sur $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Montrer que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$|\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}dx| \leq c\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},\ k = 1, ..., N.$$

iii) En déduire que $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

Exercice 2:
1) Démontrer l'injection de Sobolev:

$$H^m(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_b^\infty(\mathbb{R}^N)$$

pour $m > \frac{N}{2} + k$.
2) A-t-on $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^2)$? (la réponse doit être justifiée).

Exercice 3:
Soit v un vecteur fixé de $\mathbb{R}^3$ et $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$. Le but de cet exercice est de construire une solution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla u = -\Delta^2 u \qquad (1)$$

pour $t > 0$, $X \in \mathbb{R}^3$, $u(0, X) = u_0(X)$, $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$.
On suppose qu'il existe une solution $u(t, X) \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^3)\big)$. On note

$\widehat{u}(t,\xi)$ la transformée de Fourier de u par rapport à X.
1) Montrer que

$$\widehat{v\cdot\nabla u} = iv\cdot\xi\widehat{u}(t,\xi).$$

2) En déduire que pour $t>0$, $\xi\in\mathbb{R}^3$

$$\partial_t\widehat{u}(t,\xi) + iv\cdot\xi\widehat{u}(t,\xi) = -|\xi|^4\widehat{u}(t,\xi).$$

3) Calculer $\widehat{u}$.
4) Soit u donné par la formule

$$u(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\Big(\widehat{u}\Big)(t,x),$$

où $\mathcal{F}^{-1}$ désigne la transformée de Fourier inverse et $\widehat{u}$ est donnée par la question 3. Montrer que $u\in\mathcal{C}\big(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^3)\big)$ et que u est solution de l'équation (1).

Exercice 4:
Soit $0\le m\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ et on définit l'espace

$$V = \{u\in H^1(\mathbb{R}^N), \int_{\mathbb{R}^N} m|u|^2dx < \infty\}.$$

1) Montrer que V, muni de la norme

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2dx + \int_{\mathbb{R}^N}|u|^2dx + \int_{\mathbb{R}^N}m|u|^2dx\right)^{1/2}$$

est un espace de Hilbert qui s'injecte de façon continue dans $L^2(\mathbb{R}^N)$.
On définit la forme bilinéaire $\mathfrak{a}: V\times V\to\mathbb{R}$ par:

$$\mathfrak{a}(u,v) = \int_{\mathbb{R}^N}\nabla u.\nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} muv dx.$$

2) Montrer que $\mathfrak{a}$ est continue et quasi-coercive.
3) Quel problème variationnel peut-on alors résoudre en utilisant la forme $\mathfrak{a}$?
4) Rappeler la définition de l'opérateur A associé à $\mathfrak{a}$ (comme opérateur non-borné sur $L^2(\mathbb{R}^N)$).
5) Donner l'expression de Au pour $u\in D(A)$.
6) Soit $\lambda>0$ et $f\in L^2(\mathbb{R}^N)$. Expliquer pourquoi il existe $u\in D(A)$ tel que

$$\lambda u + Au = f \text{ et que } \|u\|_2 \le \frac{\|f\|_2}{\lambda}.$$