

Exercice 1 Trouver toutes les solutions de

$$(a) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 0 \quad (b) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0 \quad \text{et de} \quad (c) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

Exercice 2 Soit $\Omega = [0, 1] \times (0, \infty)$.

- a) Chercher toutes les solutions de $u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t)$ sur Ω qui sont de la forme $u(x, t) = X(x)T(t)$.
- b) Donner toutes les solutions $u_t(x, t) = \alpha^2 u_{xx}(x, t)$ sur Ω à satisfaire les conditions de bord $u(0, t) = u(1, t) = 0$.
- c) En superposant les solutions de la question suivante, déduire *une* solution u qui satisfait l'edp, les conditions au bord **et** la condition initiale $u(x, 0) = \varphi(x)$ pour $x \in [0, 1]$, où φ est une fonction continue qui s'annule en $\{0, 1\}$.
- d) Expliciter la solution pour la condition initiale $\varphi(x) = \sin(\pi x) + \frac{1}{2} \sin(3\pi x)$.

Exercice 3 Sur $\Omega = [0, 1] \times [0, 1] \times (0, \infty)$ résoudre $u_t(x, y, t) = \alpha^2 \Delta u(x, y, t)$ de façon analogue à la question précédente.

Exercice 4 On considère $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ sur $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

- a) Pour un solution u supposé, effectuer le changement de variables $\xi(x, t) = x + ct$ et $\eta(x, t) = x - ct$. et considérer $u(x, t) = v(\xi(x, t), \eta(x, t))$. Quelle EDP satisfait $v(\xi, \eta)$?
- b) La résoudre!
- c) Déduire une formule pour la solution "générale" de l'équation initiale.
- d) Résoudre $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ avec une condition initiale, notamment $u(x, 0) = f(x)$ et $u_t(x, 0) = g(x)$. Montrer la formule d'Alembert

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x-ct) + f(x+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

Exercice 5 (*Une inégalité de Poincaré*) Soit $f \in C^1([a, b])$ et $f(a) = 0$. En écrivant $f(x) = \int_a^x f'(t) dt$ montrer qu'il existe une constante $C > 0$ (qui dépend de a, b), telle que

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq C \int_a^b |f'(x)|^2 dx$$

Etendre au cas d'une fonction de classe C^1 sur bande $(t, x) \in [0, L] \times \mathbb{R}^{n-1}$ qui s'annule sur le bord $t \in \{0, L\}$.

Exercice 6 (*Formule de Green en dimension 2*) Soit $R : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ de classe C^1 tel que $R(a) = R(b)$, et $\varphi : [a, b] \rightarrow [0, 2\pi]$ de classe C^1 , croissant et surjectif. Soit

$$\Omega = \{(r \cos(\varphi(t)), r \sin(\varphi(t))) : t \in [a, b], 0 \leq r \leq R(t)\}$$

$\partial\Omega$ est une courbe paramétré fermée orienté positive, une paramétrisation étant donné par

$$\gamma(t) = (R(t) \cos(\varphi(t)), R(t) \sin(\varphi(t))),$$

Soient $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

a) On pose $\eta(r, t) = u(r \cos(\varphi(t)), r \sin(\varphi(t)))$. Exprimer $u_x(r \cos(\varphi(t)), r \sin(\varphi(t)))$ en termes de η_r et η_t .

b) Ecrire $I = \int_{\Omega} u_x(x, y) d(x, y)$ en coordonnées polaires, puis utiliser la formule trouvé au-dessus et une intégration par parties pour établir

$$I = \int_a^b R(t) \varphi'(t) \cos(\varphi(t)) \eta(R(t), t) dt - \int_a^b \int_0^{R(t)} \varphi'(t) \cos(\varphi(t)) \eta(r, t) + \sin(\varphi(t)) \eta_t(r, t) dr dt$$

c) Calculer

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^{R(t)} \sin(\varphi(t)) \eta(r, t) dr \right)$$

d) Injecter le résultat de 3 dans la formule obtenu en 2, puis simplifier en observant $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(b) = 2\pi$.

e) Dédire

$$\int_{\Omega} u_x(x, y) d(x, y) = \int_{\gamma} u(x, y) dy$$

f) Reproduire le même raisonnement pour démontrer

$$\int_{\Omega} v_y(x, y) d(x, y) = - \int_{\gamma} v(x, y) dx$$

Exercice 7 Soit Ω un ouvert borné étoilé de \mathbb{R}^2 comme dans l'exercice précédent. On écrit $X = (x, y)$ pour les élément de Ω . On s'intéresse aux solutions régulières (c'est à dire, de classe C^2) de

$$\begin{cases} -\Delta u(X) + \frac{\partial u(X)}{\partial x} = f(X) & \forall X \in \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

1. Soit f continue sur $\bar{\Omega}$ et u une solution de (1) de classe $C^2(\bar{\Omega})$.

a) Montrer que les intégrales $\int_{\Omega} |u(X)|^2 dX$ et $\int_{\Omega} |\nabla u(X)|^2 dX$ existent et sont finies.

b) Montrer que $\int_{\Omega} (-\Delta u) u d(x, y) = \int_{\Omega} |\nabla u(x, y)|^2 d(x, y)$.

2. Soient désormais f_1, f_2 deux fonctions continues sur $\bar{\Omega}$. On note u_k une solution de classe $C^2(\bar{\Omega})$ de l'équation (1) avec $f = f_k$, $k = 1, 2$ respectivement.

a) Montrer que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_1(X) - \nabla u_2(X)|^2 dX \leq \int_{\Omega} |f_1(X) - f_2(X)| |u_1(X) - u_2(X)| dX.$$

b) En utilisant l'inégalité de Poincaré, montrer que

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla u_1(X) - \nabla u_2(X)|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_{\Omega} |f_1(X) - f_2(X)|^2 dX \right)^{\frac{1}{2}}.$$

c) Montrer l'unicité des solutions de classe $C^2(\bar{\Omega})$ à l'équation (1).