Exercice 1 Calculer les transformations de Fourier de

a) $f_1(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$.
b) $f_2(x) = e^{-|x|}$.
c) $f_3(x) = e^{-|x|}\cos(x)$.
d) $f_4(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.
e) $f_5(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 2 Soit $f(x) = \cos(3x)$ pour $x \in (-\pi, \pi)$, $f(\pm\pi) = 1/2$ et $f(x) = 0$ pour $|x| > \pi$. Calculer la transformation de Fourier de f.

Exercice 3 Soit $f(x) = 0$ pour $|x| > 1$, et $f(x) = 1 - |x|$ pour $|x| \leq 1$. Calculer sa transformation de Fourier.

Exercice 4 Exprimer la transformation de Fourier de $\cos(x)f(2x+1)$ en termes de $\widehat{f}(\xi)$.

Exercice 5 Calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$, une fois par transformation de Fourier, une fois en écrivant $1/x = \int_0^\infty e^{-tx}\,dt$.

Exercice 6 Soit f telle que $\widehat{f}(\xi) = \frac{\xi}{1+\xi^4}$. Calculer

$$\int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$$

Exercice 7 Calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x(1+x^2)}\,dx$.

Exercice 8 Soient $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\omega_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnés par

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases} \qquad \omega(x) = \frac{1}{a}\,\psi(1-|x|^2) \qquad \omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\omega(x/\varepsilon)$$

où $a = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(1-|x|^2)\,dx$.

a) Démontrer que $\|\omega_\varepsilon\|_{L^1} = 1$ pour tout $\varepsilon > 0$.
b) Démontrer par récurrence que $\psi^{(n)}(t) = P_{2n}(1/t)e^{-1/t}$, $t > 0$ où P_k est un polynôme de dégrée k. En déduire que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et que ω, $\omega_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
c) Pour un ensemble non-vide $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on pose $A^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \ d(x, A) < \varepsilon\}$. Pourquoi est la fonction $\mathbb{1}_{A^\varepsilon}$ mesurable pour tout $\varepsilon > 0$?
d) On pose $\eta_\varepsilon = \mathbb{1}_{A^{2\varepsilon}} * \omega_\varepsilon$. Démontrer que
   i) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \ 0 \leq \eta_\varepsilon(x) \leq 1$
   ii) $\forall x \in A^\varepsilon : \ \eta_\varepsilon(x) = 1$

iii) $\forall x \notin A^{3\varepsilon} : \ \eta_\varepsilon(x) = 0$

Rappel: On définit pour $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ la convolution

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy$$

Exercice 9 Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

1. Démontrer que $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. On traitera d'abord $p = \infty, 1$ et puis, en cas que $1 < p < \infty$ on multipliera $f * g$ par une fonction $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1/p + 1/q = 1$ et utilisera ensuite l'inégalité de Hölder.
2. En déduire que $\|f * \omega_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$ (ici, ω_ε est la fonction définit plus haut).

Indication:

Exercice 10 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^1(\Omega)$. On suppose que $f = 0$ en dehors d'un compact $K \subset\subset \Omega$.

1. Montrer que $\operatorname{dist}(K, \partial\Omega) = \inf_{x \in K, y \in \partial\Omega} |x - y| > 0$.
2. Montrer que si $\varepsilon < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$, $f_\varepsilon = f * \Omega_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.
3. Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ on a $f_\varepsilon \to f$ uniformément dans $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ si $\varepsilon \to 0+$.
4. Montrer que $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$.
5. Déduire de (c) et (d) que pour tout $f \in L^p_c(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$ on a $f_\varepsilon \to f$ dans la norme de $L^p(\Omega)$.