TD du 2 Novembre.

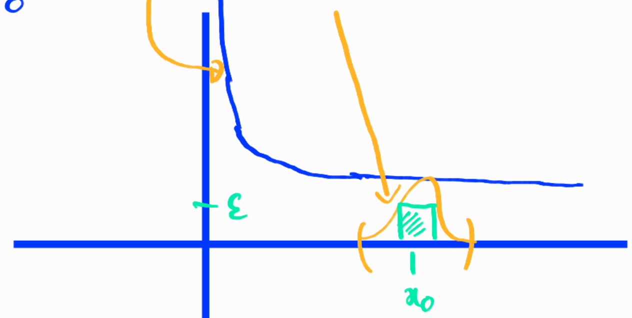
Dans le chat il y a un lien vers les feuilles de TD !

- La feuille 2 est étendue avec ⊕ d'exos sur la transf. de Fourier.

Ex 9, feuille 3

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \setminus \{0\}$, à support dans $(0,\infty)$

Mq $$\int_0^\infty \exp(n/t)\, \underset{\neq 0}{\varphi(t)}\, dt \geq C \exp(\beta \cdot n)$$



$\exists\, x_0 : \varphi(x_0) \neq 0$ OR $\varphi \geq 0$

$\varphi(x_0) > 0$. $\varepsilon = \frac{\varphi(x_0)}{2}$

Par continuité il ex. $\delta > 0$:

$$\varphi(x) \geq \varepsilon \text{ sur } \underbrace{(x_0-\delta, x_0+\delta)}_{\subseteq (0,\infty)}$$

Il suit que

$$\dots \geq \int_{\cancel{0}\; x_0-\delta}^{\cancel{\infty}\; x_0+\delta} \varphi(t) \cdot \exp(n/t)\, dt \geq \underbrace{2\delta \cdot \varepsilon}_{\text{vol. du rectangle vert}} \cdot \underbrace{\exp\left(\frac{n}{x_0-\delta}\right)}_{\text{min. de } \exp(n/t) \text{ sur } (x_0-\delta,\, x_0+\delta)}$$

$$C = 2\varepsilon\delta$$

$$\beta = \frac{1}{x_0-\delta}$$ conviennent.

En déduire qu'il n'ex. pas de $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ t.q. $$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^\infty \exp(1/t)\, \varphi(t)\, dt$$

$f(t) = \exp(1/t) \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$

$T_f \notin \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\quad supp(\varphi) \subset [\frac{1}{2}, 1]$

$\varphi_n(t) = \varphi(n t)$. $\quad Supp(\varphi_n) \subset [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \subset [0,1]$.

fausse question.

$\varphi_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$

Q: $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$? Non.

$\|\varphi_n - 0\|_\infty = \|\varphi\|_\infty > 0$

(la piste : trouver $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ avec $\langle T, \varphi_n\rangle \not\to 0$ ne marche pas avec les φ_n.)

Vu que T linéaire, on peut aussi utiliser le critère de continuité: T cont.

$\Leftrightarrow \forall K \subset \Omega : \exists C_K, M_K : \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$:

$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C_K \cdot \max\{\|\partial^\alpha \varphi\|_\infty : |\alpha| \leq M_K\}$

$K = [0,1]$ contient les supp des φ_n

$$\max\{\|\underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^k \varphi_n}_{n^k \cdot \varphi^{(k)}(n\cdot)}\|_\infty : k \leq M\}$$

$$= \max\{n^k \cdot \|\varphi^{(k)}\|_\infty : k \leq M\}.$$

indép. de n

"croissance polynomiale" !

$\frac{d}{dx}\varphi(nx) = n \cdot \varphi'(nx)$

$\left(\frac{d}{dx}\right)^2 \varphi(nx) = n^2 \cdot \varphi''(nx)$

etc.

De l'autre coté

$$|\langle T, \varphi_n\rangle| = \left|\int_0^\infty \exp(1/t)\, \varphi(nt)\, dt\right|$$

$$\overset{n \cdot t = s}{=} \left|\int_0^\infty \exp(n/s)\, \varphi(s) \cdot \frac{ds}{n}\right|$$

$t = \frac{s}{n}$

$\frac{1}{t} = \frac{n}{s}$

$$\geq \frac{1}{n} \cdot C \cdot \exp(\beta \cdot n)$$

Continuité de T donnerait

$$\exp(\beta \cdot n) \leq \underbrace{n \cdot \frac{1}{C} \cdot \max\{n^k \|\varphi^{(k)}\|_\infty : k \leq M\}}_{\text{croiss. polynomiale}}$$

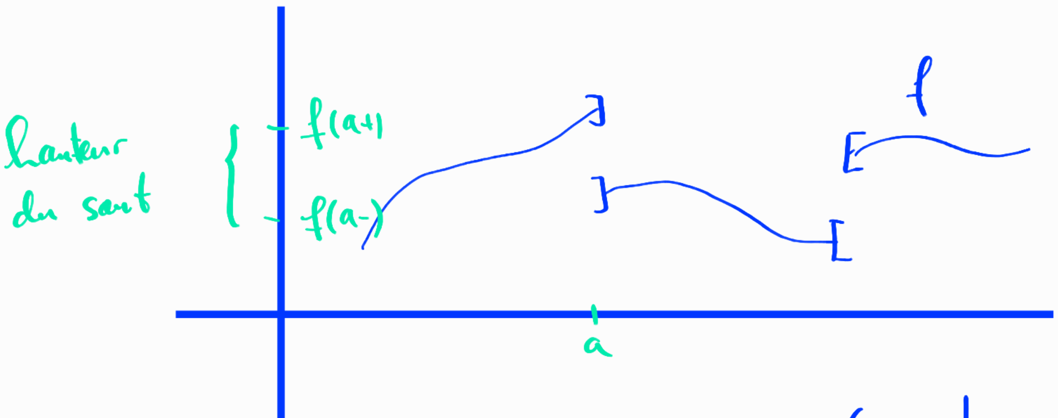
$$\leq n^{M+1} \cdot \frac{1}{C} \max\{\|\varphi^{(k)}\|_\infty\}$$

ce qui est absurde !

Conclusion $T_f \notin \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

$(f(t) = \exp(1/t) \cdot 1\!\!1_{(0,\infty)}(t))$

Ex 10. "formule des sauts"



lien entre $T_{f'} \longleftrightarrow (T_f)'$

sachant que si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ on a égalité par IPP.

notation $f(a+) = \lim_{t \to a+} f(t)$

$f(a-) = \lim_{t \to a-} f(t)$.

Mq $(T_f)' = T_{f'} + \underbrace{\sum_{a \text{ sauts}}}\ \underbrace{(f(a+) - f(a-))}_{\text{hauteur du saut}} \cdot \delta_a$

$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$.

On peut se concentrer sur 1 saut.

$(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $a < x_0 < b$

et $f \in \mathcal{C}^1((a,b) \setminus \{x_0\})$.

$$\langle (T_f)', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle$$

$$= - \int_a^b f(t) \cdot \varphi'(t)\, dt$$

$$= - \int_a^{x_0} \underbrace{f(t)}_{\mathcal{C}^1((a,x_0))} \varphi'(t)\, dt - \int_{x_0}^b \underbrace{f(t)}_{\mathcal{C}^1((x_0,b))} \varphi'(t)\, dt$$

IPP

$$= - \left[f(t) \varphi(t) \right]_a^{x_0-} + \int_a^{x_0} f'(t) \varphi(t)\, dt$$

??

$$- \left[f(t) \varphi(t) \right]_{x_0+}^{b} + \int_{x_0}^b f'(t) \varphi(t)\, dt$$

$\langle T_{f'}, \varphi \rangle$

OR $\varphi \in \mathcal{D}((a,b))$,

$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

$$= \left(f(x_0+) - f(x_0-) \right) \cdot \underbrace{\varphi(x_0)}_{= \varphi(x_0+) = \varphi(x_0-)} + \langle T_{f'}, \varphi \rangle$$

$$= \left(f(x_0+) - f(x_0-) \right) \cdot \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle + \langle T_{f'}, \varphi \rangle.$$

Donc $(T_f)' = T_{f'} + \left(f(x_0+) - f(x_0-) \right) \cdot \delta_{x_0}$.

---

feuille 4

Ex 1 Rappel : $T : E \to F$ lin.

alors T cont. ssi T borné

càd $\exists C > 0$ $\forall x$: $\|Tx\| \leq C \|x\|$

" $\Leftarrow$ " $x_n \longrightarrow x \iff (x_n - x) \longrightarrow 0$

$\Rightarrow T(x_n - x_n) \longrightarrow 0$

$\iff T(x_n) \longrightarrow T(x)$.

" $\Rightarrow$ " Contraposé !

Soit T non-borné c.à.d

$\forall C>0 \ \exists x : \|Tx\| \geq C\|x\|$

pour $C = n^2$ il ex. donc x_n

avec $\|T x_n\| \geq n^2 \|x_n\|$

$$y_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{x_n}{\|x_n\|} \quad \text{norme } 1$$

$y_n \longrightarrow 0.$

Mais $\|T y_n\| = \frac{1}{n} \frac{1}{\|x_n\|} \|T(x_n)\|$

$$\geq \frac{n^2 \cdot \cancel{\|x_n\|}}{\cancel{n}\ \cancel{\|x_n\|}} = n$$

donc $T y_n \not\longrightarrow 0 = T(0)$

T n'est donc pas cont. en 0!

<u>Ex1</u>. $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ linéaire

Alors T cont. $\Leftrightarrow$ $\forall K$ compact de Ω il ex. $C_K > 0$, $M_K \in \mathbb{N}$:

$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$:

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_K \cdot \max\{ \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty : |\alpha| \leq M_K \}$$

"$\Leftarrow$". $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ signifie

① $\exists K$ cap. de Ω: $\forall n$: $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subseteq K$

② $\forall \alpha$: $\|\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)\|_\infty \to 0$.

Par hypothèse, $\exists\, C_K, M_K, \ldots$

$$|\langle T, \varphi_n - \varphi \rangle| \leq C_K \cdot \max\{\|\partial^\alpha(\varphi_n - \varphi)\|_\infty : |\alpha| \leq M_K\} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

On a $\varphi_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support dans K.

"$\Rightarrow$" Par contraposé : Supposons

$\exists K \subseteq \Omega$ compact :

$\forall C > 0, \ \forall M > 0$:

$\exists \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$:

$$|\langle T, \varphi \rangle| \geq C \max\{\|\partial^\alpha \varphi\|_\infty : |\alpha| \leq M\}$$

Pour $C = n^2$, $M = n$

$$\psi_n = \varphi_n \cdot \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{1}{\max\{\|\partial^\alpha \varphi_n\| : |\alpha| \leq n\}}}_{\lambda_n}$$

① $\mathrm{Supp}(\psi_n) \subseteq K \subseteq \Omega \ \forall n.$

② $\|\partial^\beta(\psi_n - 0)\|_\infty$

$= \|\partial^\beta \psi_n\|_\infty$

$$= \frac{\|\partial^\beta \varphi_n\|_\infty}{n \cdot \max\{\|\partial^\alpha \varphi_n\| : |\alpha| \leq n\}}$$

≤ 1 pour $n > |\beta|$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

donc $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}(\Omega)} 0$

Mais

$$|\langle T, \psi_n\rangle| \geq n^2 \max\{\|\partial^\alpha \psi_n\|_\infty : |\alpha|\leq n\}$$

$$\overset{\otimes}{=} \frac{\cancel{n^2} \, \cancel{\max\{\|\partial^\alpha \varphi_n\|_\infty : |\alpha|\leq n\}}}{\underbrace{\cancel{n} \, \cancel{\max\{\|\partial^\alpha \varphi_n\|_\infty : |\alpha|\leq n\}}}_{\lambda_n}}$$

$$= n \longrightarrow +\infty.$$

d'où $\langle T, \psi_n\rangle \not\longrightarrow 0$

Par conséquent, T est discontinu.

$\otimes$

$$\|\partial^\alpha(\psi_n)\|_\infty = \|\partial^\alpha(\varphi_n \cdot \lambda_n)\|_\infty = \lambda_n \cdot \|\partial^\alpha(\varphi_n)\|_\infty .$$

Jusque là :

- $\mathcal{D}(\Omega)$ déf., ex.
- topo. sur $\mathcal{D}(\Omega)$ en fixant la convergence de fonct. de test

- Def. $\mathcal{D}'(\Omega)$
- Ex. $L^1_{loc} \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$

<u>prochaine étape</u> : Topo. sur $\mathcal{D}'$

<u>Def.</u> $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} T$

si $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$: $\langle T_n - T, \varphi \rangle \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

$\iff \langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle$

(" convergence faible* ")

supp(φ) "mesure en x" est en réalité une <u>moyenne</u> sur le supp(φ)

$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} f$ si $\int f_n \cdot \varphi \longrightarrow \int f \cdot \varphi$

remplace $f_n(x)$

$\langle T_n, \varphi \rangle = \int f_n \cdot \varphi$

www.math.u-bordeaux.fr/~bhaak/enseignement/...