Ex 1 (feuille 4)

Soit $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ linéaire.

T cont. $\Leftrightarrow$ $\forall K \subseteq \Omega$ $\exists$ $m \in \mathbb{N}$, $C > 0$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \cdot \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$$

α avec $|\alpha| \leq m$

$$\underbrace{\left(\partial^{(0,..,0,1)} \varphi, \ \partial^{(0,..,1,0)} \varphi, \ \ldots , \right)}$$

on prend une norme ; en dim. finie toutes les normes sont équiv.

D'où équiv. entre

$\max \{ \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty : |\alpha| \leq m \}$ et

$\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty$:

"$\Leftarrow$" On suppose l'inégalité.

T cont. si $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ implique $\langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow[n \to \infty]{} \langle T, \varphi \rangle$

Soit donc (φ_n) une suite qui cv vers φ. Cela signifie qu'il ex. $K \subset \Omega$

$$\begin{cases} \cdot \ \operatorname{supp}(\varphi_n) \subseteq K \\ \cdot \ \forall \alpha : \ \partial^\alpha \varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} \partial^\alpha \varphi \end{cases}$$

$$|\langle T, \varphi_n \rangle - \langle T, \varphi \rangle|$$

$$= |\langle T, \varphi_n - \varphi \rangle| \quad (T \text{ lin.})$$

(hypoth.)

$$\leq C \max_{|\alpha| \leq m} \underbrace{\|\partial^\alpha (\varphi_n - \varphi)\|_\infty}_{\longrightarrow 0 \ \forall \alpha}.$$

max. sur un # fini de suites.

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

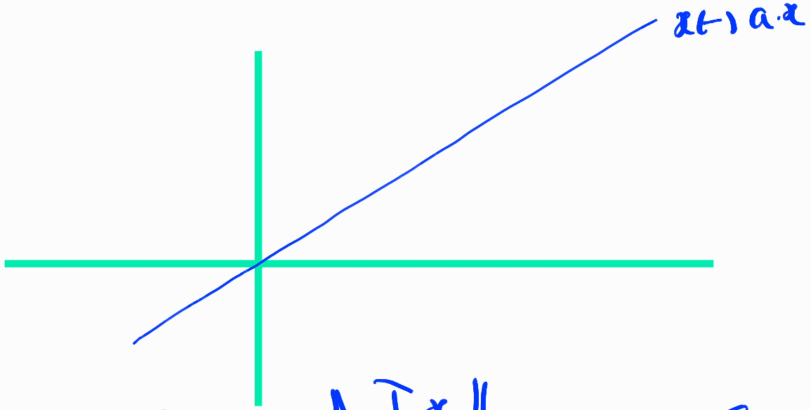
Soient $(a_n), (b_n)$ deux suites qui tendent vers 0 alors $\max(a_n, b_n) \longrightarrow 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il ex. N : $\forall n \geq N$ $|a_n - 0| < \varepsilon$

Il ex. M : $\forall n \geq M$: $|b_n - 0| < \varepsilon$

donc $\forall n \geq \max(N, M)$: $\max(|a_n|, |b_n|) < \varepsilon$.

"$\Rightarrow$" Rappel. Soit T linéaire. Alors
T cont. ssi T borné (*)



(*) au sens: $\exists C \ \forall x \neq 0. \ \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq C$

et pas "borné" dans le sens
$$|\sin(x)| \leq 1.$$

"borné $\Rightarrow$ cont" $\quad x_n \to x$
$$\|T(x_n) - T(x)\| = \|T(x_n - x)\|$$
$$\leq C\|x_n - x\| \longrightarrow 0.$$

"cont. $\Rightarrow$ borné" Par contraposé:
non-borné implique que $\forall n > 0$:
$$\exists\ x_n \neq 0 : \ \frac{\|T(x_n)\|}{\|x_n\|} \geq n^2$$

Pose $y_n = \dfrac{1}{n\|x_n\|} \cdot x_n$

À l'effet que $y_n \longrightarrow 0$

[T lin. $\Rightarrow$ $T(0) = T(0 \cdot 0) = 0 \cdot T(0)$
 $\mathbb{R}$ E $= 0$]

$$\|T(y_n)\| = \frac{1}{n\|x_n\|} \cdot \|T(x_n)\| \geq n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Alors T non-cont. en 0 et donc
T non-cont. en tout point par translation.

Revenons à l'ex. 1:
"$\Rightarrow$" Par contraposé. Supposons qu'il ex. $K \subset \Omega$ compact: $\forall n : \exists\ \varphi_n \in \mathcal{D}_K$

(*) $$|\langle T, \varphi_n\rangle| \geq n^2 \max\{\|\partial^\alpha \varphi_n\| : |\alpha| \leq n\}$$

Observons que $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subseteq K$.

$$\psi_n(x) = \varphi_n \cdot \underbrace{\frac{1}{n \cdot \max\{\|\partial^\alpha \varphi_n\| : |\alpha| \le n\}}}_{\lambda_n}$$

Est-ce que $\psi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$?

Soit β un multi-indice.

$$\partial^\beta \psi_n = \frac{\partial^\beta \varphi_n}{n \cdot \max\{\|\partial^\alpha \varphi_n\|_\infty : |\alpha| \le n\}}$$

Alors $\|\partial^\beta \psi_n\|_\infty \le \frac{1}{n}$ dès que $n \ge |\beta|$.

Mais $\langle T, \psi_n \rangle = \langle T, \lambda_n \cdot \varphi_n \rangle$

$$\overset{*}{\ge} \; n \cdot \frac{\max\{\cancel{\|\partial^\alpha \varphi_n\|_\infty} : |\alpha| \le n\}}{\max\{\cancel{\|\partial^\alpha \varphi_n\|_\infty} : |\alpha| \le n\}}$$

$$\longrightarrow +\infty$$

donc $\langle T, \psi_n \rangle \not\longrightarrow 0$.

Conv. de Distributions

$(T_n) \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On dit que

$T_n \xrightarrow{n\to\infty} T$ si

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$: $\langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle T, \varphi \rangle$.

<u>Ex 2.</u> Montrer: $\langle T_n', \varphi \rangle \longrightarrow \langle T', \varphi \rangle$

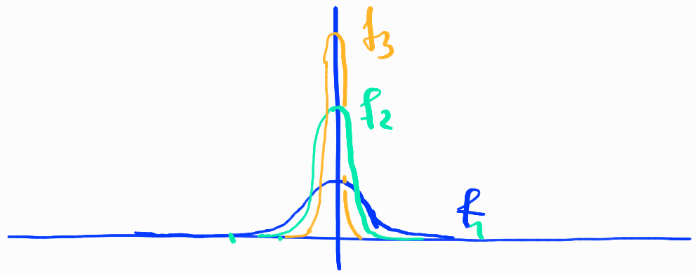
$\iff -\langle T_n, \varphi' \rangle \longrightarrow -\langle T, \varphi' \rangle$

vrai $\forall \varphi'$ car

$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \varphi' \in \mathcal{D}(\Omega)$.

<u>Exemple.</u> $f(x) \ge 0$, à supp. compact, et d'intégrale 1.

$f_n(x) = n \cdot f(n \cdot x)$



$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta_0$. (cv. dominé)

Du coup $f_n' \longrightarrow \delta_0'$ (par ex. 2)

$\langle f_n', \varphi \rangle \longrightarrow -\varphi'(0)$

Ex3. $f_k(x) = \left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)\right)^k$.

$\langle T_k, \varphi \rangle = \int \varphi \cdot f_k$. Mq: $T_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$.

Conv. ponctuelle. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

$\lim_{k\to\infty} \underbrace{\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)\right)^k}_{\longrightarrow 1}$ $\exists K : \forall k \geq K(x)$ $\cos\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right) \geq \frac{1}{2}$.

$\overset{k \geq K(x)}{=} \exp\left(k \cdot \ln\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)\right)\right)$

$= \exp\left(\lim_{k\to\infty} k \cdot \ln\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)\right)\right)$ $\frac{x}{\sqrt{k}} \longrightarrow 0$

$\cos(x) \underset{(x\approx 0)}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$

$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + O(h^3)$

$(h \approx 0)$

$\cos\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right) = 1 \underbrace{- \frac{x^2}{2k} + O\left(\frac{x^4}{k^2}\right)}_{h}$

$\ln\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)\right) = -\frac{x^2}{2k} + O\left(\frac{x^4}{k^2}\right) + O\left(\frac{x^4}{k^2}\right)$

$k \cdot \ln\left(\cos\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)\right) = -\frac{x^2}{2} + O\left(\frac{x^4}{k}\right)$

$\xrightarrow[k\to\infty]{} -\frac{x^2}{2}$.

càd: $f_k(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} \exp(-x^2/2)$

point par point.

Q: $T_k \xrightarrow{?} T$ $\left(T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi e^{-x^2/2}\right)$

A montrer $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\int f_k(x)\,\varphi(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} \int e^{-x^2/2}\,\varphi(x)$$

Or $|f_k| \leq 1$, $|\varphi|$ sert de majorant intégrable !

On conclut par conv. dominée.

$$|\sin(x)| \leq \int_0^x \underbrace{|\cos(t)|}_{\leq 1} dt \leq x$$

$$|\cos(x)| \leq \left|1 - \int_0^x \underbrace{\sin(t)}\, dt\right| \geq 1 - \frac{x^2}{2}$$

$0 \leq x \leq \pi \rightarrow 0 \leq \sin(t) \leq t$

Astuce : $\| f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) \|$

pour trouver des inégalités exactes au lieu des $O(\dots)$.

Généraliser (f_n) suite avec

① $\forall K \subset \Omega : \exists M > 0 : \|f_n(x)\|_{L^\infty(K)} \leq M$

② $\cancel{\forall}$ p.p. $x \in \Omega$ fixé, $f_k(x) \longrightarrow f(x)$

permet de conclure

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} f$$

($|\varphi| \cdot M$ comme majorant intégrable)

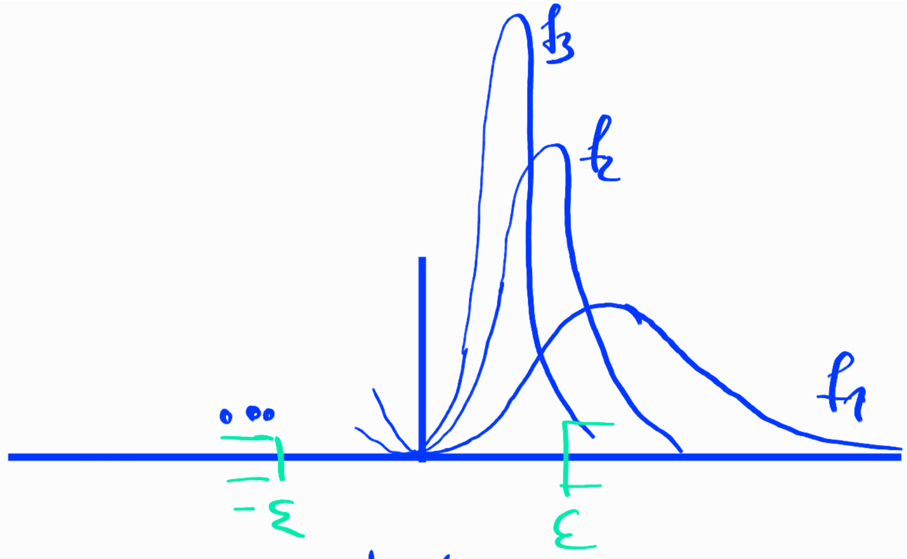
Ex 1 $\quad f_n(x) = \dfrac{n}{n + x^{2n}}$

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \mathbb{1}_{[-1,1]}.$$

Ex 2 : $\quad f_n(x) = n \cdot e^{-nx^2} \qquad f_n \longrightarrow 0$ p.p.

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = n \cdot e^{-1} \longrightarrow +\infty.$$

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)} 0 \quad (\Omega = \mathbb{R}^*)$$



$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^*)} 0$$

Raison. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$, $\operatorname{supp}(\varphi)$ compact de $\mathbb{R}^*$ $\exists\, \varepsilon > 0$:

$$\varphi(x) = 0 \quad \forall\ |x| \le \varepsilon.$$

et sur $\{x : |x| \le \varepsilon\}$,

(aussi $\varphi(x) = 0 \quad \forall\ |x| \ge M$.

Pour tant $\varepsilon > 0$, $\sup\{|f_n(x)| : |x| \ge \varepsilon\} < \infty$.

Q: (ex. $f_n \longrightarrow \mathrm{p.v.}\left(\frac{1}{x}\right)$?

Est-ce que $\langle f_n, \varphi \rangle = \int f_n \cdot \varphi$ admet une limite via un chm. de var?

Ex 3. $f_n(x) = n^3 x^2 e^{-nx^2} = n \cdot g(nx^2)$

$$g(t) = te^{-t}.$$