Questions ?

Sobolev $H^1(\Omega) = ?$

$H^1_0(\Omega) = ?$

- dérivé "faible" = dérivé au sens de distrib.

S'il ex. g : $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$-\langle T_f', \varphi\rangle = \int f \cdot \varphi' = -\int g \cdot \varphi = -\langle T_g, \varphi\rangle$$

on appelle g la dérivée faible de f. Car $\boxed{T_g = (T_f)'}$

- $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$; $(1 \le p \le \infty)$

où $W^{m,p}(\Omega) = \{ f \in L^p : \forall |\alpha| \le m$
$\partial_\alpha f$ "faible" $\in L^p \}$

- $H^1_0(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1}$

$\Big[$ $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$ avec sa notion de convergence : $\varphi_n \to \varphi$ si
(a) $\exists K \Subset \Omega$ $supp(\varphi_n) \subseteq K$ $\forall n$.
(b) $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$: $\partial_\alpha \varphi_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} \partial_\alpha \varphi$. $\Big]$

Concrètement : $f \in H^1_0$

$\iff \exists (\varphi_n) \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\begin{cases} \varphi_n \xrightarrow{L^2} f \\ \varphi_n' \xrightarrow{L^2} f' \end{cases}$$

Ex. $I = (-1, 1)$.

$f(x) = \mathbb{1}_I(x)$.

$f \in H^1(I)$

$f \in H^1_0(I)$

$f \in L^2(I)$? oui ✓

f' au sens faible ?

$$\int_{-1}^{1} f\cdot\varphi' = \int_{-1}^{1}\varphi' = \varphi(1)-\varphi(-1)$$
$$= 0 \quad (\varphi\in\mathcal{D}(I))$$

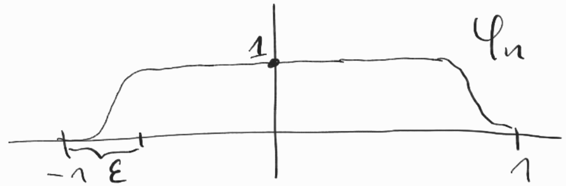
"Brezis" $$= -\int_{-1}^{1} g\cdot\varphi\,, \quad g\equiv 0.$$

$f' = 0. \quad \in L^2(I).$ <u>Donc</u> $f\in H^1(I)$

Q2 $\quad f\in H^1_0(I).$ <u>Càd</u>

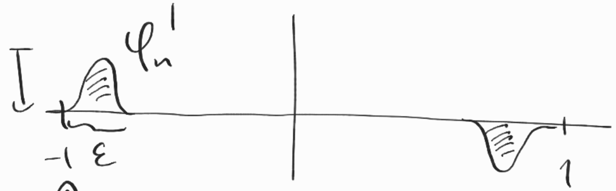
$$\exists(\varphi_n) : \begin{cases} \varphi_n \xrightarrow{L^2} f \\ \varphi_n' \xrightarrow{L^2} f'=0 \end{cases}$$

question délicate.



<u>L'heuristique.</u>

$\approx \frac{1}{\varepsilon}$



$\varphi_n'(t)^2$ longueur ε, hauteur $\approx \frac{1}{\varepsilon^2}$

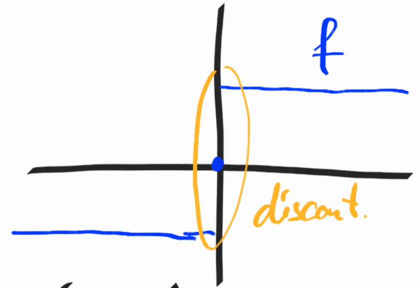
$\rightsquigarrow$ on s'attend à

$$\|\varphi_n'\|_{L^2} \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

| Thm du cours : trace$(f) = 0$ pour $f\in H^1_0$ si Ω régulier et borné.

<u>ici</u> : $f\notin H^1_0(I)$.

<u>Ex2</u> $\quad f(x) = \mathrm{sgn}(x)$



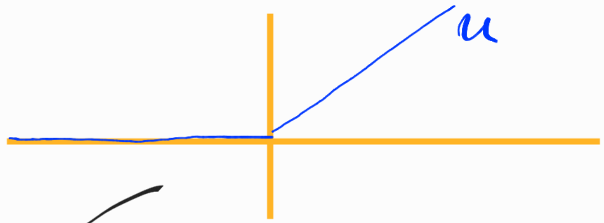
$f\in H^1(I)$? $\quad I = (-1,1)$.

<u>Rappel</u>. $f\in H^1(I) \Rightarrow \exists\, g$ cont. avec $f = g$ p.p. ($\triangle$ dimension $\underline{1}$)

<u>Thm</u> $f\in H^m$, $m > k + \frac{\dim}{2} \rightsquigarrow f\in C^k$.

ici, f discont. $\rightsquigarrow f\notin H^1(I)$.

<u>Ex3</u> $\quad u(x) = \dfrac{x+|x|}{2}.$



$u \in L^2(-1,1)$ ✓

$$\int_{-1}^{1} u\cdot\varphi' = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x\,\varphi'(x) + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |x|\,\varphi'(x)$$

$$= \int_0^1 x\,\varphi'(x) = \left[x\cdot\varphi(x)\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot\varphi(x)$$

$$= -\int_{-1}^{1} \mathbb{1}_{[0,1]}\cdot\varphi$$

$\Rightarrow \boxed{u' = \mathbb{1}_{[0,1]}}$. $u' \in L^2(-1,+1)$

donc $u \in H^1(I)$.

Ex 4 $\Omega = (0,1)\times(0,1)$.

$$u(x,y) = e^{-x}\sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

Est-ce que $u \in H^1(\Omega)$?

u bornée, Ω de mesure finie (1)

donc $u \in L^2(\Omega)$

On dés. u est $C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$u_x(x,y)$ borné sur Ω

$u_y(x,y)$ aussi.

$\Rightarrow \nabla u \in L^2(\Omega)$.

Ainsi, $u \in H^1(\Omega)$.

Ex 5 $\Omega = (0,1)\times(0,1)$.

$$u(x,y) = x^{1/3}\cdot\sin(y).$$

Ω de mesure finie, u bornée.

$\rightsquigarrow u \in L^2(\Omega)$.

$$(\nabla u)(x,y) = \left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\sin(y),\ x^{1/3}\cos(y)\right).$$

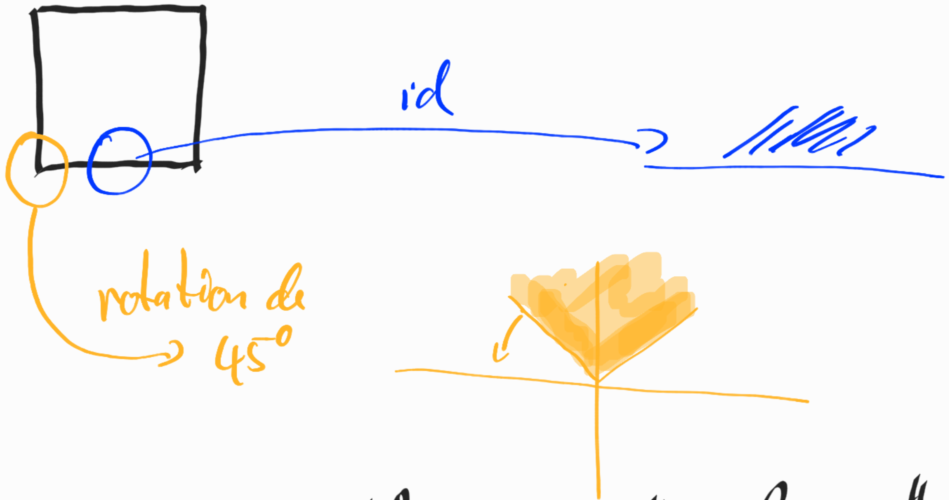
$$\|\nabla u\|_2 \geq \frac{1}{3}x^{-2/3}|\sin(y)| \notin L^2(\Omega)$$

$$\int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^1 \frac{dx}{x^{4/3}}\right)}_{=+\infty} \sin^2(y)\,dy$$

Donc $u \notin H^1(\Omega)$.

Revenons sur $u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$

elle s'annule sur $\partial\Omega$. Est-ce que $u \in H^1_0(\Omega)$?



Dém. de $u \in H^1_0(\Omega)$ "à la main".

Observons $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Soit

η_k fonct. plateau sur $\mathbb{R}$,

$\eta_k = 1$ sur $[\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}]$.

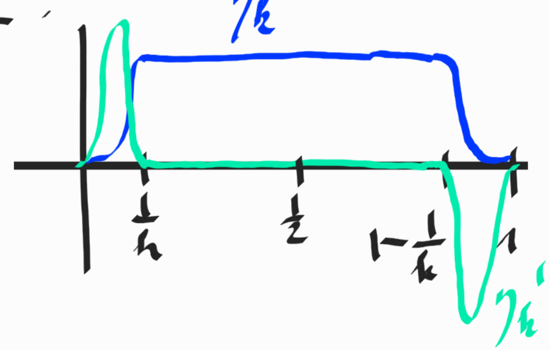
Montrons que $\eta_k(x)\sin(\pi x) \xrightarrow{H^1} \sin(\pi x)$

(1) $$\int_0^1 \left|\eta_k(x)\sin(\pi x) - \sin(\pi x)\right|^2 dx = \int_0^1 \underbrace{\sin^2(x)}_{\le 1} \underbrace{\left|\eta_k(x) - 1\right|^2}_{\le C} dx$$

on a cv. ponctuelle et une majoration par $C \in L^1(0,1)$.

Par cv. dominée, $\eta_k \sin(\pi x) \xrightarrow[L^2]{} \sin(\pi x)$.

(2) Les dérivées



$$(\eta_k(x)\sin(\pi x))' = \eta_k'(x)\sin(\pi x) + \pi\cos(\pi x)\,\eta_k(x).$$

<u>Clair:</u> $\pi\cos(\pi x)\,\eta_k(x) \longrightarrow \pi\cos(\pi x)$

comme avant.

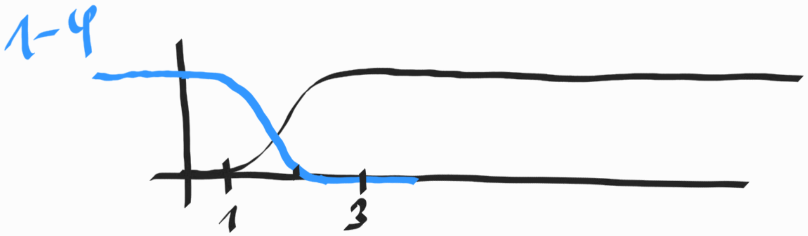
La question est donc, si

$$\eta_k'(x)\sin(\pi x) \xrightarrow{L^2} 0.$$

Il suffit de se concentrer sur $[0,\frac{1}{k}]$.

$$(*) \quad \int_0^{1/k} |\eta_k'(x)|^2 \sin^2(\pi x)\,dx$$

Comment contrôler η_k' ?



$\varphi \in \mathcal{C}^\infty(0,1)$

$\mathrm{supp}(\varphi) \subseteq [1,\infty)$.

$\varphi \equiv 1$ sur $[3,+\infty)$

$$\eta_k(x) \overset{def.}{=} ! \; \underbrace{\varphi(xk)}_{\text{coupe proche de } x=0.}\underbrace{\left(1-\varphi\left(\frac{k^2}{k-1}x\right)\right)}_{\text{coupe proche de } x=1}$$

$\rightsquigarrow |\eta_k'(x)| \leq \underline{\underline{k}}\cdot$ Const.

Ainsi,

$$(*) \leq \int_0^{1/k} c^2\cdot k^2 (\pi x)^2\,dx = c\pi^2 \frac{k^2}{3} k^{-3} = c'\cdot k^{-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0.$$

$$\int_0^1\int_0^1 \left|\sin(\pi x)\sin(\pi y) - \eta_k(x)\sin(\pi x)\,\eta_k(y)\sin(\pi y)\right|^2$$

$\xrightarrow{L^2} 0.$ par cv. dominée.

Pour les dérivées: $\frac{\partial}{\partial x}$ d'abord.

$$\underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \cos^2(\pi x)\left(1-\eta_k(x)\right)^2 dx \, \sin^2(\pi y)\,dy}_{\longrightarrow 0.}$$

reste:

$$\underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \sin^2(\pi x)\left(\eta_k'(x)\right)^2 dx \quad \sin^2(\pi y)\,dy}_{\longrightarrow 0.}$$

pareil pour $\frac{\partial}{\partial y}$.

Ex 6. Soit $u \in H^1_0(\Omega)$.

$$\hat{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{sur } \Omega \\ 0 & \text{sur } \Omega^c. \end{cases}$$

Mq: $\hat{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

$\exists (\varphi_n) \in \mathcal{D}(\Omega)$: $\varphi_n \xrightarrow{H^1} u$.

(Rappel:

$$\|f\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega |f|^2 + \int_\Omega \|\nabla f\|_2^2 \;)$$

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. ← Calcul de dériv. faible de $\hat{u}$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\psi\right)$$

$$= \int_\Omega u \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\psi\right)$$

$$= \left\langle u \,\middle|\, \frac{\partial}{\partial x_i}\psi \right\rangle_{L^2(\Omega)} = \left\langle \lim \varphi_n \,\middle|\, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\langle \varphi_n \,\middle|\, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_n \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

(???)

$$= - \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \cdot \psi = - \lim_{n\to\infty} \left\langle \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \middle| \psi \right\rangle_{L^2}$$

$$= - \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i} \middle| \psi \right\rangle_{L^2(\Omega)} = - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \psi.$$

Montrer $D(\hat{u}) = (Du)^\wedge$

(où "$\wedge$" signifie: extension par zéro.)

en particulier, $\| D(\hat{u}) \|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

$$= \| Du \|_{L^2(\Omega)} < \infty.$$

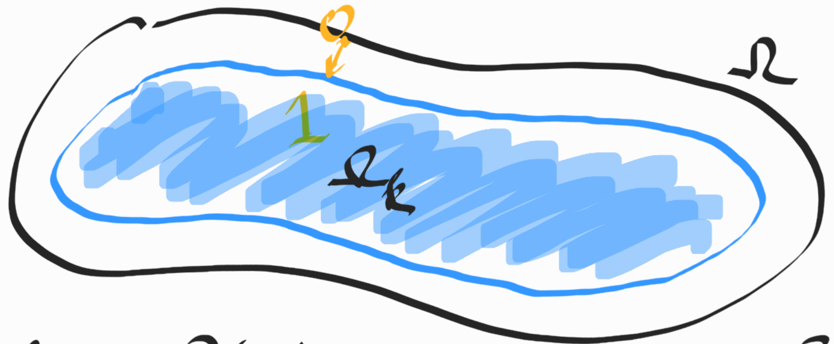
"réciproque": Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ et Ω ouvert, borné avec $\mathrm{supp}(u) \subset \Omega$.

Alors $u \in H^1_0(\Omega)$.

L'idée est $\exists (\varphi_n) \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_n \xrightarrow{H^1} u$.

(thm de densité).

$$\Omega_k = \{ x \in \Omega : \ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \geq \tfrac{1}{k} \}$$



$\exists\, \eta_k \in \mathcal{D}(\Omega)$: $\eta_k \equiv 1$ sur Ω_k

$$\| \underbrace{\eta_k \varphi_{n_k}}_{\in \mathcal{D}(\Omega)} - u \|_{H^1(\Omega)} = \| \eta_k \varphi_{n_k} - u \|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$$

Par hypothèse, Ω borné $\Rightarrow$ $\mathrm{supp}(u)$ compact $\Rightarrow \exists N : \forall k \geq N$:

$\mathrm{supp}(u) \subseteq \Omega_k$

à l'effet que $u = u \cdot \eta_k$!

$$\rightarrow \| \eta_k \varphi_{n_k} - u \|_{H^1} = \| \eta_k (\varphi_{n_k} - u) \|_{H^1}$$

- OR $\varphi_{n_k} \xrightarrow{L^2} u$ et $\|\eta_k\|_\infty \leq 1$,

$$\|\eta_k(\varphi_{n_k} - u)\|_{L^2} \longrightarrow 0.$$

- Quant aux dérivées :

$$\underbrace{\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i} \cdot (\varphi_{n_k} - u)}_{?} + \underbrace{\eta_k}_{L^\infty} \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_{n_k} - u)}_{\xrightarrow{L^2} 0}$$

$$\hookrightarrow \int_\Omega \underbrace{\left|\frac{\partial \eta_k}{\partial x_i}\right|^2}_{\|\cdot\|_\infty = C_k} |\varphi_{n_k} - u|^2 \, dx$$

⚠ on peut toujours jouer avec n_k :

soit n_k t.q. $\|\varphi_{n_k} - u\|_{L^2} \leq \frac{C_k}{k}$!

$\leadsto$ ce terme est $\leq \frac{1}{k}$.

fin