Corrigé equation des ondes, $u_t = \alpha u_{xx}$ par séparation de variables. On suppose que $u(t,x) = T(t)X(x)$. En injectant cette formule dans l'équation différentielle, on obtient $T(t)X(x) = \alpha^2 T(t)X''(x)$, ou, $\alpha^{-2}T'(t)/T = X''(x)/X(x)$. La gauche ne dépend que de t, la droite que de x, ils sont donc deux fonctions constantes. Ceci donne $T' = \lambda\alpha^2 T$ et $X'' = \lambda X$. Or $T' = \lambda\alpha^2 T$ a pour solution $T(t) = c\exp(\lambda\alpha^2 t)$, λ doit être négatif, car sinon la chaleur croit exponentiellement avec $t \to +\infty$ ce qui semble absurde. On pose alors $\lambda = -\mu^2$. L'équation pour X devient $X'' = -\mu^2 X$. Aisni,

$$X(x) = a\sin(\mu x) + b\cos(\mu x)$$

(Il n'y a donc pas de sinh / cosh mais des sin/cos ! (ici l'erreur de signe est survenu pendant le premier TD). Les conditions au bord 'Dirichlet' sont d'un coté

$$0 = u(t,0) = \exp(-\mu^2\alpha^2 t)(a\sin(\mu 0) + b\cos(\mu 0)) = b\exp(-\mu^2\alpha^2 t)$$

et donc $b = 0$, puis de l'autre $0 = u(t,1) = a\exp(-\mu^2\alpha^2 t)\sin(\mu 1)$ ce qui nécissite $\mu = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Résumé: pour $k \in \mathbb{Z}$ on a une solution

$$u_k(t,x) = c_k\exp(-k^2\pi^2\alpha^2 t)\sin(k\pi x).$$

avec une constante c_k qui peut dépendre de k. La solution générale est cherché sous la forme 'superposé' des u_k, c'est à dire

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\exp(-k^2\pi^2\alpha^2 t)\sin(k\pi x)$$

Finalement, la valeur initiale $u(x,0) = f(x)$ donne $u(0,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\sin(k\pi x) = f(x)$. Rappelons que $(\sin(k\pi x))_k \in \mathbb{Z}$ est une base orthonormale de $L_2([0,1])$. Ainsi la suite (c_k) des coefficients de Fourier de $f \in L_2(0,1)$ donne une solution unique u de la forme $u(t,x) = T(t)X(x)$ recherché.

Exercice 1 Calculer les transformations de Fourier des fonctions $f_0(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}$, $f_1(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$, $f_2(x) = e^{-|x|}$, $f_3(x) = e^{-|x|}\cos(x)$, $f_4(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 2 Calculer $\widehat{f}$ pour

a) $f(x) = \cos(3x)$ pour $x \in (-\pi,\pi)$, $f(\pm\pi) = 1/2$ et $f(x)$ nul ailleurs.

b) $f(x) = 0$ pour $|x| > 1$, et $f(x) = 1-|x|$ pour $|x| \le 1$.

Exercice 3 Soit $g(x) = \cos(x)f(2x+1)$. Exprimer $\widehat{g}$ en termes de $\widehat{f}$.

Exercice 4 Calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$, une fois par transformation de Fourier, une fois en écrivant $1/x = \int_0^\infty e^{-tx}\,dt$.

Exercice 5 Soit $\widehat{f}(\xi) = \frac{\xi}{1+\xi^4}$. Calculer $\int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx$, sans calculer f.

Exercice 6 Calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x(1+x^2)}\, dx$.

Exercice 7 Soit $f = O((1+x^2)^{-1})$ une fonction continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-y^2} e^{2xy}\, dy = 0.$$

Montrer que $f = 0$.

Exercice 8 Soient $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\omega_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnés par

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases} \qquad \omega(x) = \frac{1}{a}\, \psi(1-|x|^2) \qquad \omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \omega(x/\varepsilon)$$

où $a = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(1-|x|^2)\, dx$.

a) Démontrer que $\|\omega_\varepsilon\|_{L^1} = 1$ pour tout $\varepsilon > 0$.

b) Démontrer par récurrence que $\psi^{(n)}(t) = P_{2n}(1/t) e^{-1/t}$, $t > 0$ où P_k est un polynôme de dégrée k. En déduire que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et que ω, $\omega_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

c) Pour un ensemble non-vide $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on pose $A^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \ d(x, A) < \varepsilon\}$. Pourquoi est la fonction $\mathbb{1}_{A^\varepsilon}$ mesurable pour tout $\varepsilon > 0$?

d) On pose $\eta_\varepsilon = \mathbb{1}_{A^{2\varepsilon}} * \omega_\varepsilon$. Démontrer que

   i) $\forall x \in \mathbb{R}^n :\ 0 \leq \eta_\varepsilon(x) \leq 1$

   ii) $\forall x \in A^\varepsilon :\ \eta_\varepsilon(x) = 1$

   iii) $\forall x \notin A^{3\varepsilon} :\ \eta_\varepsilon(x) = 0$

Rappel: On définit pour $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ la convolution

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\, dy$$

Exercice 9 Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

1. Démontrer que $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. On traitera d'abord $p = \infty, 1$ et puis, en cas que $1 < p < \infty$ on multipliera $f * g$ par une fonction $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1/p + 1/q = 1$ et utilisera ensuite l'inégalité de Hölder.

2. En déduire que $\|f * \omega_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$ (ici, ω_ε est la fonction définit plus haut).