Convergence de distributions

Exercice 1 Soit (T_n) une suite de distributions qui converge vers $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. Démontrer que (T_n') converge vers T'.

Exercice 2 Soit T_k la distribution associé à la fonction $f_k(x) = \Big(\cos(x/\sqrt{k})\Big)^k$. Montrer que (T_k) converge au sens des distributions vers $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ que l'on déterminera.

Exercice 3 Soit $F_N(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}$. On note T_N la distribution associée à F_N (justifier que $T_{F_N} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$!). Le but de l'exercice est de déterminer la limite (au sens des distributions) de (T_N).

1. Montrer que la suite $(F_N(t))_N$ converge dans aucun point t (on distingue les multiples (ir)rationels de π). Remarque: ceci barre l'approche par convergence dominé exploité dans l'exercice précédent.

2. Montrer que $F_N(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin((2N+1)t/2)}{\sin(t/2)}$ pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

3. Soit $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ une fonction à support dans $[-2M\pi, 2M\pi]$. Déduire de l'égalité précedente que
$$\langle T_N, \varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin((2N+1)t/2)}{\sin(t/2)}\,\psi(t)dt,$$
où $\psi(t) = \sum\limits_{m=-M}^{M-1} \varphi(t + 2m\pi)$.

4. En écrivant $\psi(t) = \psi(0) + th(t)$, démontrer que T_N converge vers $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}$.

Espaces de Sobolev.

Exercice 4 Soit $I = (-1, 1)$.

a) Soit $f(x) = \text{signe}(x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Est-ce que $f \in H^1(I)$?

b) Montrer que la fonction
$$u\ :\ \begin{cases} I & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x+|x|}{2} \end{cases}$$
appartient à $H^1(I)$ et déterminer sa dérivée.

c) Montrer que toute fonction continue sur $\bar{I}$ et continument dérivable par morceaux sur $\bar{I}$ est une fonction de $H^1(I)$.

Exercice 5 Soit $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Est-ce que les fonctions suivantes appartiennent à $L_2(\Omega)$ ou à $H^1(\Omega)$?

$$u(x, y) := e^{-x}\sin(\pi x)\sin(\pi y) \qquad v(x, y) := x^{1/3}\sin(\pi y)$$

Exercice 6 Soit (η_k) une suite de "fonctions plateaux" avec $\eta_k \in \mathcal{D}((0,1))$, $0 \leq \eta_k \leq 1$, et η_k constant à 1 sur $[\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}]$. Expliciter le support de η_k'. Montrer que $f_k(x) = \eta_k(x)\sin(\pi x) \in \mathcal{D}((0,1))$ et que $f_k(x) \to \sin(\pi x)$ en norme H^1. En déduire que la fonction u de l'exercice précédent appartient à $H_0^1(\Omega)$. Obtenir le même résultat en discutant la régularité de Ω par un théorème du cours.

Exercice 7 Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$

a) (DS 2017) Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que

$$\widehat{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \Omega \end{cases}$$

définit une fonction dans $H^1(\mathbb{R}^d)$.

b) Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et $\text{supp}(u) \subset \Omega$. Alors $u \in H_0^1(\Omega)$. Indication: approcher u par une suite de fonctions $(\varphi_n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^d)$, puis utiliser une fonction plateau pour conclure.

Exercice 8* (Opérateurs fermés). Soit X, Y des espaces de Banach, et $D \subset X$. On dit que $T : D \to Y$ est *fermé* si pour toute suite (d_n) de D qui converge vers $x \in X$ telle que $Td_n \to y \in Y$ on a automatiquement $x \in D$ et $Tx = y$.
Exemple: Soit $\Omega = (-1,1)$ (plus généralement, un domaine bornée de $\mathbb{R}^d$) et $X, Y = L^2(\Omega)$, et $D = H^1(\Omega)$. Soit $f_n \in D$ telle que $f_n \to f$ et $Tf_n = f_n' \to g$ dans $L^2(\Omega)$ (dans le cas général, $Tf = \nabla f$).

a) Justifier l'écriture $f_n(t) = f_n(0) + \int_0^t f_n'(s)\,ds \qquad (*)$

b) Montrer que $\left|\int_0^t f_n'(s)\,ds - \int_0^t g(s)\,ds\right| \to 0$ uniformément (en t).

c) Utiliser $(*)$ et l'hypothèse pour montrer que $(f_n(0))_n$ est Cauchy.

d) Soit $\alpha = \lim f_n(0)$, et $h(t) = \alpha + \int_0^t g(s)\,ds$. Montrer que h' (au sens faible) est égal à g.

e) Montrer $f_n \to h$ uniformément et déduire $f = h$ presque partout. Déduire que T est fermé.

Exercice 9 Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ et $u \in H^1(\Omega)$. On pose

$$f_n = \begin{cases} \sqrt{u^2 + n^{-2}} - \frac{1}{n} & \text{si} \quad u > 0 \\ 0 & \text{si} \quad u \leq 0 \end{cases}$$

Soit $u_+ = \max(0,u)$, et $u_- = \max(0,-u)$. Montrer que $f_n \to u_+$ dans $L_2(\Omega)$. Montrer qu'il existe une sous-suite extraite $(f_{\varphi(n)})$ qui converge dans $H^1(\Omega)$ (on pourra utiliser que $F \in C^1(\mathbb{R})$ avec $\|F'\|_\infty = M < \infty$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$. alors $F \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\nabla(F(u)) = F'(u)\nabla u$.) En déduire que $u_+, u_-, |u|$ sont dans $H^1(\Omega)$.
Avec l'exercice précédent on obtient des informations plus précises: Calculer ∇f_n, puis montrer que $\nabla f_n \to (\nabla u)\mathbb{1}_{\{u>0\}}$ dans $L_2(\Omega)$. Ainsi $\nabla|u| = \text{signe}(u) \cdot \nabla u$ p.p.

Exercice 10 Soit $\Omega = B(0,1)$ la boule d'unité de $\mathbb{R}^2$ pour la distance Euclidienne, et $\alpha > 0$. $u(x) = \left|\ln(\frac{1}{\|x\|_2})\right|^\alpha$. Pour quelles valeurs de α est u est dans $H^1(\Omega)\backslash C(\Omega)$?

Exercice 11 Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$.

a) Rappeler l'inégalité de Poincaré pour $f \in H_0^1(I)$. Est-elle vraie pour $f \in H^1(I)$?
b) Soit $f \in H^1(I)$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f(c) = \frac{1}{|I|} \int_I f dx$.
c) En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f - f(c)\|_{L_2(I)} \le C \|f'\|_{L_2(I)}$.
d) Etendre la preuve à un un convexe borné Ω de $\mathbb{R}^n$: il existe un $C > 0$, dépendant de Ω tel que, pour $f \in H^1(\Omega)$

$$\left\| f - \tfrac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f dx \right\|_{L_2(\Omega)} \le C \left\| \nabla f \right\|_{L_2(\Omega)}.$$

Exercice 12 Soit $\alpha \in (0,1)$ fixé et $\beta > 0$. Soit $Q = (0,1) \times (0,1)$ et $\Omega_\alpha = \{(x,y) \in Q : \quad y > x^\alpha\}$.
a) Quelle est la régularité de $\partial \Omega_\alpha$?
b) Montrer que $u(x,y) = y^{-\beta}$ est dans l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega_\alpha)$ ssi $1 + \frac{1}{\alpha} > p(1+\beta)$.
c) Soit $p > d = 2$ et β choisi suffisement petit pour que la condition de (b) soit satisfaite. La fonction $u \in W^{1,p}(\Omega_\alpha)$, admet-elle une extension à $W^{1,p}(Q)$?
d) Est-ce que cette construction reste valable si $\alpha = 1$?

Exercice 13
a) Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Montrer que T est compact si X est de dimension finie. Montrer que tout opérateur T de rang fini est compact.
b) Montrer que l'identité: $Tx = x$ est compact sur X si et seulement dim $(X) < \infty$.
c) Soit $S \in \mathcal{L}(X,Y)$, $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$ tel que S ou T sont compacts. Montrer que TS est compact.

Exercice 14 Soient X, Y des espaces de Banach et $T \in K(X,Y)$. Montrer que si (x_n) converge faiblement vers x, alors (Tx_n) converge (en norme) vers Tx.

Exercice 15 (DS 2017)
a) Rappeler le théorème de compacité de Rellich.
b) Soit $I_n = (2^{-n-1}, 2^{-n})$, $u_n = 2^{n/2} \mathbb{1}_{I_n}$ et $\Omega = \bigcup_{n \ge 0} I_n$.
   i) Calculer $\|u_n\|_{L^2(\Omega)}$.
   ii) Montrer $u_n \in H^1(\Omega)$ pour tout n.
   iii) Montrer que (u_n) admet une sous-suite extraite qui converge faiblement vers 0 dans $H^1(\Omega)$.
   iv) L'injection $i : H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est elle continue? compacte?

Exercice 16*
a) Soient X, Y des espaces de Banach et $T \in K(X,Y)$. Montrer que si (x_n) converge faiblement vers x, alors (Tx_n) converge (en norme) vers Tx.
b) Soit Ω un ouvert borné, connexe et régulier de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $f \in H^1(\Omega)$,

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \|f - \alpha\|_{L^2(\Omega)} \le C \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Indication: effectuer un raisonnement par l'absurde : si l'inégalité est fausse, il existe une suite de fonctions f_n de norme $\|f_n\|_{H^1} = 1$ tel que pour tout n et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\|f_n - \alpha\|_{L_2} > n \|\nabla f_n\|. \qquad (*)$$

Utiliser (a) pour montrer qu'il existe une sous-suite extraite $(f_{\sigma(n)})$ qui converge dans L_2. Utiliser $(*)$ pour déduire que $(\nabla f_{\sigma(n)})$ est Cauchy dans $L_2(\Omega)$. Trouver une contradiction, en choisissant $\alpha_n = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f_n dx$.

Exercice 17 Soit H un espace de Hilbert et $B : H \times H \to \mathbb{R}$ une application sesquilinéaire satisfaisant $B(x,y) \leq M\|x\|\|y\|$ et $\mathrm{Re}B(x,x) \geq m\|x\|^2$.

a) Montrer que pour tout $u \in H$ il existe $w \in H$ tel qu'on ait pour tout $v \in H$ $B(v,u) = \langle v|w\rangle_H$.
b) Soit $Au := w$. Montrer que A est linéaire, puis considérer $\|Au\|^2 = B(Au,u)$ pour montrer que A est continu.
c) Utilisez $\mathrm{Re}B(x,x) \geq m\|x\|^2$ pour montrer que $\|Au\| \geq m\|u\|$. En déduire que A est injectif et à image fermé (indication: utilisez la complétude de H).
d) Montrer que l'image de A est dense : supposons existe un $w \perp \mathrm{Image}(A)$.Montrez que $w = 0$.
e) Ainsi, A est linéaire, continu, bijectif. Montrer que $A^{-1} \in \mathscr{L}(H)$.
f) Soit $L : H \to \mathbb{R}$ linéaire et continu. Montrer qu'il existe $u \in H$ tel qu'on a égalié entre les applications $v \mapsto B(u,v)$ et L.

Exercice 18 On veut résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ sur } \mathbb{R}, \\ u(x) \to 0 \text{ quand } |x| \to \infty, \end{cases} \tag{1}$$

avec $f \in L^2(\mathbb{R})$. Une solution classique est une solution $C^2(\mathbb{R})$ vérifiant (1). On dira que $u \in H^1(\mathbb{R})$ est une solution faible de (1) si

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}) : \qquad \int_{\mathbb{R}} u'v' + \int_{\mathbb{R}} uv = \int_{\mathbb{R}} fv.$$

a) Soit $\eta \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ une "fonction plateau" à support dans $[-2,2]$ telle que $0 \leq \eta \leq 1$ et $\eta|_{[-1,1]} = 1$. On définit la suite $\eta_k(x) = \eta(\frac{x}{k})$. Montrer que si $g \in L^2(\mathbb{R})$ alors $\eta_k g \to g$ dans $L^2(\mathbb{R})$.
b) Soit u une solution classique de (1). Multiplier l'équation différentielle par η_k et intégrer pour montrer que $u \in H^1(\mathbb{R})$. Montrer ensuite que u est aussi une solution faible de (1).
c) Montrer l'existence et l'unicité d'une solution faible à (1).
d) On suppose que f est continue. Montrer alors que la solution faible de (1) est dans $C^2(\mathbb{R})$. Conclure.

Exercice 19 Soit Ω un ouvert borné régulier. Si u et v sont dans $H^1(\Omega)$, on pose :

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \left(\int_\Omega u\right)\left(\int_\Omega v\right).$$

a) Montrer que a est bilinéaire, continue et elliptique sur $H^1(\Omega)$.
b) Montrer que si $f \in L^2(\Omega)$, il existe un et un seul u solution de

$$\forall v \in H^1(\Omega), \;\; a(u,v) = \int_\Omega fv.$$

Montrer qu'alors $\int_\Omega u = \frac{1}{\mathrm{mes}(\Omega)}\int_\Omega f$.

c) Dans le cas où $\int_\Omega f = 0$, quelle est l'EDP vérifiée par u ?