Exercice 1 Soit $f \in L^1$ et $g(x) = f(2x+1)$. Exprimer $\widehat{g}$ en termes de $\widehat{f}$. Soit f dérivable, et $f, f' \in L^1$. Exprimer $\widehat{f'}(\xi)$ en termes de $\widehat{f}(\xi)$. Soit $g \in L^1$ tel que $\widehat{g}$ est dérivable avec dérivée intégrable. Écrire $(\widehat{g})'$ comme transformation de Fourier d'une fonction h à expliciter.

Exercice 2 Calculer les transformations de Fourier des fonctions $f_1(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}$, $f_2(x) = x\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$, $f_3(x) = (1-|x|)\mathbb{1}_{[-1,1]}$, $f_4(x) = \cos(x)\mathbb{1}_{[-\pi/2,\pi/2]}$, $f_5(x) = e^{-|x|}$ et montrer $e^{-|x|} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,dt$ par la formule d'inversion. Continuer à calculer les transformations de Fourier des fonctions $f_6(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$, $f_7(x) = (1+6x)e^{-|x|}$, $f_8(x) = x^2 e^{-x^2}$

Exercice 3 Calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$, une fois en utilisant la formule d'inversion, une fois en écrivant $1/x = \int_0^\infty e^{-tx}\,dt$.

Exercice 4 Soit $\widehat{f}(\xi) = \frac{\xi}{1+\xi^4}$. Trouver $\int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx$, sans calculer f.

Exercice 5 Calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x(1+x^2)}\,dx$.

Exercice 6 Soit $f = O((1+x^2)^{-1})$ une fonction continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-y^2} e^{2xy}\,dy = 0.$$

Montrer que $f = 0$.

Exercice 7* Soit Q une matrice réelle, symétrique, positive définie de taille $n \times n$. Montrer que $f(x) = \exp(-\frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle)$ a pour transformation de Fourier

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\det(Q)}} \exp(-1/2\langle Q^{-1}\xi, \xi\rangle). \tag{1}$$

Indication: montrer d'abord $\widehat{f}(\xi)\exp(+1/2\langle Q^{-1}\xi,\xi\rangle) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\frac{1}{2}\langle Qy, y\rangle)\,dy$.

Exercice 8 Trouver toutes les solutions de edp

(a) $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 0$ (b) $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$ et de (c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$

Exercice 9 Soit $b \in \mathbb{R}^d$. On cherche à ramener l'e.d.p.

$$u_t(t,x) + b\nabla_x u(t,x) = 0 \qquad \text{pour}(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \tag{2}$$

à une e.d.o. en introduisant un nouveau paramètre s, et en considérant $t = t(s)$ et $x = x(s)$.

a) Soit $h(s) = u(t(s), x(s))$. Calculer $h'(s)$, comparer avec l'e.d.p. (2)

b) On ajoute à (2) une valeur initiale: $u(0,x) = g(x)$. Déduire une formule de u en fonction de g.

Même exercice pour le problème non-homogène:

$$\begin{cases} u_t(t,x) + b\nabla_x u(t,x) & = f(t,x) \qquad \text{pour} \quad (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) & = g(x) \qquad\qquad\quad\; x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{3}$$

Indications: écrire $h(0) = h(-t) + \int_{-t}^{0} h'(s)\,ds$ pour trouver la formule qui exprime u en fonction de g, f.

Exercice 10 (Les ondes, 1D). On considère $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ sur $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$, avec valeur initiales $u(0,x) = g(x)$, et $u_t(0,x) = h(x)$.

a) Soit $v(t,x) = (\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x})u(t,x)$. Montrer que v satisfait une équation de transport. En déduire une formule pour v, puis, par le même méthode, pour u.

b) Montrer la formule d'Alembert

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}\big[f(x{-}ct) + f(x{+}ct)\big] + \tfrac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds.$$

Exercice 11* **La méthode des caractéristiques.** Considérons

$$a(x,y)\cdot u_x(x,y) + b(x,y)\cdot u_y(x,y) \;=\; c(x,y)\cdot u(x,y,z)$$

et supposons une solution u. Soit $S = \{(x,y,u(x,y)) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ son graphe.

a) Calculer des vecteurs directeurs du plan tangent en un point $(x_0, y_0, u(x_0,y_0))$, puis calculer un vecteur normal.

b) Déduire que $(a(x,y), b(x,y), c(x,y))$ doit être dans le plan tangent de S en tout point $(x,y,u(x,y))$. Mais on ne connaît pas S. Pour le trouver (et donc u), nous cherchons des *courbes* $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ qui lui appartiennent. Donner un système d'e.d.o. pour (x,y,z).

c) Mise en exemple: dans le cas $d = 1$ re-visiter l'équation de transport (2) de l'exercice ci-dessus.

  i) Soit $\Gamma = \{(0,r) : r \geq 0\}$ la courbe dans $\mathbb{R}^2$ sur laquelle les valeurs initiales de u sont prescrites. Cherchons une courbe caractéristique qui passe par le point $(0, r, g(r))$ de S pour un $r \geq 0$ fixé. Il convient de considérer $\gamma_r(s) = (t(r,s), x(r,s), z(r,s))$, et de résoudre (de façon unique) les 3 e.d.o.'s.

  ii) Exprimer r, s en termes de x, t, puis trouver (à nouveau) $u(t,x) = z(r(x,t), s(x,t))$.

d) Reproduire les étapes sur l'exemple

$$u_t + x u_x = 0 \qquad (t > 0, x \geq 0) \qquad u(0,x) = g(x)$$

Montrer que $u(t,x) = g(x\,e^{-t})$.

e) Résoudre le problème (semi-linéaire)

$$u_t + a u_x = u^2 \qquad u(0,x) = \cos(x)$$

selon la même 'recette'. La solution sera 'locale': $u(t,x) = \frac{\cos(x-at)}{1-t\cos(x-at)}$ dans le sens qu'elle a des pôles ...

Exercice 12** Considérer $u_t = x u_y + u_{xx}$ sur $(0,\infty) \times \mathbb{R}^2$. Soit $v(t,\xi,\eta)$ la transformation spatiale (en x, y, mais pas en t) de u. Montrer $v_t + \eta v_\xi = -\xi^2 v$. Trouver v par la méthode de caractéristiques, puis utiliser (1) pour déduire une solution u.