La méthode des caractéristiques, dans le cas linéaire

$$a(x,y)\cdot u_x(x,y)+b(x,y)\cdot u_y(x,y) \;=\; c(x,y)$$

et supposons une solution u. Soit $S=\{(x,y,u(x,y)) : (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$ son graphe.

a) le vecteur $n(x,y)=(u_x,u_y,-1)$ est normal à S.

b) De ce fait, $(a(x,y),b(x,y),c(x,y))$ doit être dans le plan tangent de S en tout point $(x,y,u(x,y))$. Cherchons une *courbe* $\gamma(s)=(x(s),y(s),z(s))$ dans S: le plus simple serait que $(x'(s),y'(s),z'(s))=(a,b,c)$. Ceci donne un système d'edo. Une *valeur initiale* est une donné de la forme $u(\gamma(r))=f(r)$, où $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ est une courbe paramétré. Souvent $\gamma(r)=(0,r)$ si x a le rôle de temps et y le rôle d'espace. Mais on peut prescrire une valeur plus générale sur une courbe γ. Pour satisfaire la condition initiale, il faut que $(\gamma(r),u(\gamma(r)))=(\gamma(r),f(r))\in S$. Concrètement ceci produit les valeurs initiales des 3 e.d.o's: il faut résoudre le système

$$\begin{array}{ll} \frac{d}{ds}x(r,s)=a(x(r,s),y(r,s)) & x(r,0)=\gamma_1(r) \\ \frac{d}{ds}y(r,s)=b(x(r,s),y(r,s)) & y(r,0)=\gamma_2(r) \\ \frac{d}{ds}z(r,s)=c(x(r,s),y(r,s)) & z(r,0)=f(r) \end{array}$$

Ceci décrit la solution u sous la forme implicite de $z(r,s)$: il faut l'exprimer via les variables (x,y) !

c) Exemple: $u_x+bu_y=0$ avec $u(0,r)=g(r)$. Alors

$$\begin{array}{ll} \frac{d}{ds}x(r,s)=1 & x(r,0)=0 \\ \frac{d}{ds}y(r,s)=b & y(r,0)=r \\ \frac{d}{ds}z(r,s)=0 & z(r,0)=g(r) \end{array}$$

Donc $x(r,s)=s$, $y(r,s)=sb+r$ et $z(r,s)=g(r)$. Or $x=s$, $y=sb+r$, $r=y-bx$, et donc $u(x,y)=z(r(x,y),s(x,y))=g(y-bx)$. Nous savons déjà que ceci est la bonne solution.

Exercice 1 Traiter $u_x+bu_y=f(x,y)$ avec $u(0,r)=g(r)$ de la même manière.

Exercice 2 Résoudre $u_x+3y^{2/3}u_y=2$ avec $u(r,1)=1+r$.

Exercice 3 Résoudre $xu_x-2yu_y=1$ avec $u(r,r)=r^3$.

Exercice 4 Résoudre $(x-y)u_x+u_y=x$ avec $u(r,0)=f(r)$.

Le problème semi-linéaire:

$$a(x,y)\cdot u_x(x,y)+b(x,y)\cdot u_y(x,y) \;=\; c(x,y,u)$$

avec $u(\gamma_1(r),\gamma_2(r))=g(r)$ Comme avant, on considère S. Le vecteur $(a(x,y),b(x,y),c(x,y,u(x,y)))$ doit apparaître à S, ainsi que la courbe $(\gamma_1(r),\gamma_2(r),g(r))$.

$$\begin{array}{ll}
\frac{d}{ds}x(r,s)=a(x(r,s),y(r,s)) & x(r,0)=\gamma_1(r)\\
\frac{d}{ds}y(r,s)=b(x(r,s),y(r,s)) & y(r,0)=\gamma_2(r)\\
\frac{d}{ds}z(r,s)=c(x(r,s),y(r,s),z(r,s)) & z(r,0)=g(r)
\end{array}$$

Qu'il faudra résoudre. Ceci décrit la solution u sous la forme implicite de $z(r,s)$: il faut l'exprimer via les variables (x,y) !
Exemple:

$$u_t+au_x=1+u^2 \qquad u(0,r)=\cos(r)$$

On a donc

$$\begin{array}{ll}
\frac{d}{ds}t(r,s)=1 & t(r,0)=0\\
\frac{d}{ds}x(r,s)=a & x(r,0)=r\\
\frac{d}{ds}z(r,s)=1+z(r,s)^2 & z(r,0)=\cos(r)
\end{array}$$

Ainsi, $t(r,s)=s$, $x(r,s)=as+r$ et $z(r,s)=\tan(s+\arctan(\cos(r)))$. On résout $s=t$, $r=x-at$ et donc $u(t,x)=z(t(r,s),x(r,s))=\tan(t+\arctan(\cos(x-at)))$. Vérification:

$$\begin{array}{rl}
u_t = & (1+u^2)(1 \;\; +\frac{a\sin(x-at)}{1+\cos^2(x-at)})\\
u_x = & (1+u^2)(0 \;\; -\frac{\sin(x-at)}{1+\cos^2(x-at)}).
\end{array}$$

Exercice 5 Résoudre $u_x+u_y+u=1$ avec $u(r,r+r^2)=\sin(r)$.

Exercice 6 Résoudre $-yu_x+xu_y=u$ avec $u(r,0)=\psi(r)$.

Exercice 7 Résoudre $yu_x-xu_y=e^u$ avec $u(0,r)=r^2-1$.

Exercice 8 Résoudre $(x^2+1)\,u_x+\frac{2xy}{x^2+1}\,u_y=2xyu$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, surjet à la condition initiale $u(0,r)=\ln(r)$.

Exercice 9 Résoudre $(2x+4y)u_x+(x+2y)u_y=u$ sur $\{(x,y): x\geq 2y\geq 0\}$ avec la condition initiale $u(4r,0)=r^2$. Indication: la matrice 3×3 du système d'edo's est diagonalisable.

Le problème quasi-linéaire:

On essaye de traiter de la même façon le problème suivant:

$$a(x,y,u)\cdot u_x(x,y)+b(x,y,u)\cdot u_y(x,y) \;=\; c(x,y,u)$$

Le problème est le couplage des e.d.o's qui apparaît: Exemple: $(x+u)u_x + yu_y = u - y$ avec $u(r,1) = 1 + r$.

$$\begin{array}{ll} \frac{d}{ds}x(r,s) = x(r,s) + z(r,s) & x(r,0) = r \\ \frac{d}{ds}y(r,s) = y(r,s) & y(r,0) = 1 \\ \frac{d}{ds}z(r,s) = z(r,s) - y(r,s) & z(r,0) = 1 + r \end{array}$$

Cela donne $y(r,s) = e^s$ directement. Les edo's de x, z sont couplés: Posons $w = (x,z)^t$. Alors $\frac{d}{ds}w = A.w + b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad b(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^s \end{pmatrix}$$

Puisque $A = I + N$ avec $N^2 = 0$, $A^k = I + kN$ et donc

$$\exp(sA) = \begin{pmatrix} e^s & se^s \\ 0 & e^s \end{pmatrix}$$

ce qui donne un système fondamental du problème homogène. On cherche une solution particulière par variation de la constante: soit $w(s) = \exp(sA)c(s)$: ce qui donne aisément

$$c'(s) = \exp(sA)^{-1}b(s) = \begin{pmatrix} e^{-s} & -se^{-s} \\ 0 & e^{-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -e^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Par intégration,

$$c(s) = \begin{pmatrix} s^2/2 \\ -s \end{pmatrix} \qquad \text{donc} \qquad w(s) = e^{+s} \begin{pmatrix} -s^2/2 \\ -s \end{pmatrix}$$

Ainsi, en considérant les valeurs initiales, la solution unique est

$$x(r,s) = \left(-\frac{s^2}{2} + (1+r)s + r\right)e^s \qquad \text{et} \qquad z(r,s) = (1 + r - s)e^s.$$

Il suit $x = -\frac{y}{2}\ln(y)^2 + ry(1 + \ln(y)) + y\ln(y)$ donc $ry = \frac{x + \frac{y}{2}\ln(y)^2 - y\ln(y)}{1+\ln(y)}$
Finalement,

$$\begin{aligned} u(x,y) =& z(r(x,y), s(x,y)) \\ =& y + ry - y\ln(y) = y + \frac{x + \frac{y}{2}\ln(y)^2 - y\ln(y)}{1 + \ln(y)} - y\ln(y) \\ =& \frac{2x + 2y - y\ln(y)^2 - 2y\ln(y)}{2 + 2\ln(y)}. \qquad \text{Ouff!} \end{aligned}$$

Exercice 10 Résoudre sur $[1,\infty) \times \mathbb{R}^2$ l'équation

$$2u_t + (u_x + u_y)\tan(u) = 0$$

avec la condition initiale $u(1,p,q) = \arctan(p+q)$, $(p,q) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 11 Résoudre $xu_x + yuu_y + xy = 0$ avec $u(r, 1/r) = 5$ $(r > 0)$. Indication: le système d'edo est non-linéaire. Considérer $\frac{d}{ds}(x(r,s)y(r,s))$ pour s'en sortir ...

Exercice 12 (expérimental) Trouver $T > 0$ maximal tel que le problème de Hopf sur $(0,\infty) \times \mathbb{R}$

$$u_t + (f(u))_x = 0 \qquad u(0,r) = u_0(r)$$

admet une solution de classe C^1 pour $t \in [0,T)$:

a) $f(u) = u^2/2$, $u_0(r) = \arctan(r)$.
b) $f(u) = u^2/2$, $u_0(r) = -\arctan(r)$.
c) $f(u) = \cos(u)$, $u_0(r) = r$.
d) $f(u) = \cos(u)$, $u_0(r) = \sin(r)$.
e) $f(u) = u^3/3$, $u_0(r) = \sin(r)$.

Le théorème de la divergence.

Exercice 13 Soit $\Omega = [a_1, b_1] \times .. \times [a_n, b_n]$. Montrer que

$$\int_\Omega u_{x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} u\nu_i dS \tag{1}$$

où $\nu = (\nu_1, .., \nu_n)$ est le vecteur normal extérieur à Ω. Déduire que

$$\int_\Omega u_{x_i} v\, dx = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i dS - \int_\Omega uv_{x_i}\, dx. \tag{2}$$

Par sommation sur i et le fait que $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u.\nu$, nous obtenons de (1)la version bébé du théorème de divergence

$$\int_\Omega \mathrm{div}(u) dx = \int_{\partial\Omega} u.\nu dS \tag{3}$$

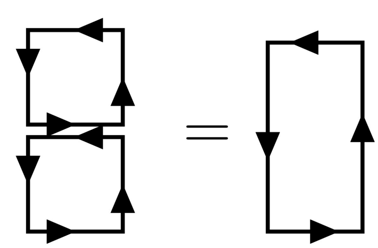
En écrivant u_{x_i} à la place de u dans (1), puis en sommant sur i,

$$\int_\Omega \Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS \tag{4}$$

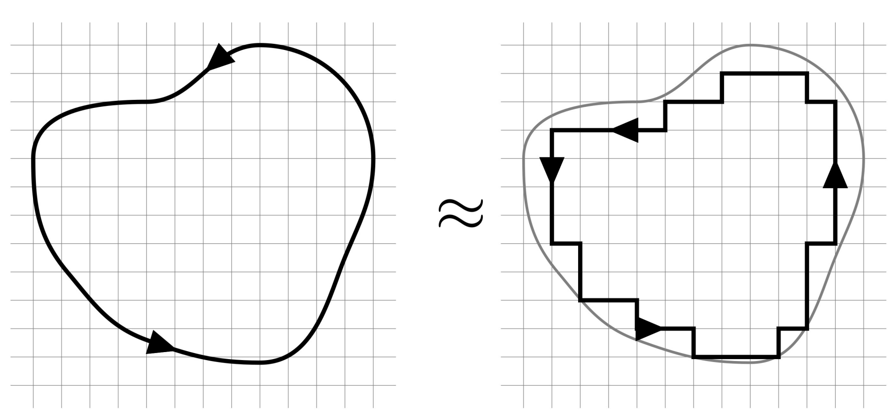
Et, par choix $v = u_{x_i}$ dans (2), puis en sommant sur i,

$$\int_\Omega \nabla(u).\nabla(v)\, dx = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu}\nu_i dS - \int_\Omega u\Delta v\, dx. \tag{5}$$

Le gros du travail est fait! Observons d'abord, que sur une intégrale (curviligne par orientation / de surface par les vecteurs normaux extérieurs qui sont de signe opposé)



et dans un deuxième temps par approximation



ce qui rend le résultat compréhensible et plausible. Saurez vous réécrire cette intuition en preuve?