**Exercice 1** Soient $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\omega_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnés par

$$\psi(t) = \begin{cases} e^{-1/t} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases} \qquad \omega(x) = \tfrac{1}{a}\,\psi(1-|x|^2) \qquad \omega_\varepsilon(x) = \tfrac{1}{\varepsilon^n}\omega(x/\varepsilon)$$

où $a = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(1-|x|^2)\,dx$.

a) Démontrer que $\|\omega_\varepsilon\|_{L^1} = 1$ pour tout $\varepsilon > 0$.

b) Démontrer par récurrence que $\psi^{(n)}(t) = P_{2n}(1/t)e^{-1/t}$, $t > 0$ où $P_k$ est un polynôme de dégrée $k$. En déduire que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ et que $\omega$, $\omega_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

c) Pour un ensemble non-vide $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on pose $A^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \ d(x, A) < \varepsilon\}$. Pourquoi est la fonction $\mathbb{1}_{A^\varepsilon}$ mesurable pour tout $\varepsilon > 0$?

d) On pose $\eta_\varepsilon = \mathbb{1}_{A^{2\varepsilon}} * \omega_\varepsilon$. Démontrer que

i) $\forall x \in \mathbb{R}^n : \ 0 \leq \eta_\varepsilon(x) \leq 1$

ii) $\forall x \in A^\varepsilon : \ \eta_\varepsilon(x) = 1$

iii) $\forall x \notin A^{3\varepsilon} : \ \eta_\varepsilon(x) = 0$

**Exercice 2** (Un théorème de Borel sur l'espace des fonctions $C^\infty$ .. de 1895) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existent des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infiniment dérivables et telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad f^{(n)}(0) = a_n.$$

a) En utilisant une fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 dans un voisinage de 0, résoudre le problème dans le cas que la série entière $\sum_{n=0}^\infty \frac{a_n}{n!}x^n$ a un rayon de convergence non nul.

b) Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ à support inclus dans $[-1, 1]$ et égale à 1 sur $[-1/2; 1/2]$. On pose, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \tfrac{a_n}{n!}x^n\phi(x) \qquad \text{et} \qquad M_n = \sup\{|f_n^{(k)}(x)| : \ x \in \mathbb{R}, k < n\}.$$

On définit une suite $\lambda_n$ par $\lambda_n = \max(2, 2^n M_n)$ et pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \lambda_n^{-n} f_n(\lambda_n x) = \sum_{n=0}^\infty \tfrac{a_n}{n!}x^n\phi(\lambda_n x).$$

Montrer que la série définissant $f$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que la série des dérivés $k$-ièmes de $\lambda_n^{-n}f_n(\lambda_n x)$ converge uniformément en $x \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé.

d) Déduire que $f$ est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ et calculer $f^{(k)}(0)$.

e) Est-il toujours possible d'obtenir une fonction vérifiant la même propriété si on demande que $f$ soit entière?

**Exercice 3** Soit $\Omega$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $L = \operatorname{supp} f$. Que peut on dire de la distance (euclidienne) de $L$ à $\partial\Omega$?

**Exercice 4** Soit $(f_n)$ la suite de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ définie par $f_n(t) = \frac{1}{2^n}\exp\big(\frac{-1}{(1-t/n)^2}\big)$ si $|t| < n$ et zéro sinon. Montrer que $(f_n)$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ que l'on précisera. A-t-on convergence dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ?

**Exercice 5** Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset [1,2]$, $\varphi = 1$ sur $[a,b]$ où $1 < a < b < 2$. On définit pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_n(x) = e^{-n}\varphi(nx).$$

Montrer que $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. A-t-on $\varphi_n \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$?

**Exercice 6**

a) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $h \in C_c(\mathbb{R})$ telle que $h * f = f$ pour tout $f \in C_c(\mathbb{R})$ (Indication: comment est-ce qu'on montre que l'unité d'un groupe est unique? S'inspirer de cette idée en remplaçant $\delta_0$ par une approximation convenable pour trouver un argument par absurde).

b) Existe-t-il une telle fonction $\delta \in L^1(\mathbb{R})$? (modifier un peu les idées de la première question).

**Exercice 7** Lesquelles des applications suivantes $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ définissent des distributions?

a) $T\varphi = \varphi(0)^2$

b) $T\varphi = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|\, dt.$

c) $T_k\varphi = \int_{[0,1]} \varphi^{(k)}(t)\, dt$ où $k \in \mathbb{N}$.

d) $T\varphi = \sup_{t\in\mathbb{R}} \varphi(t)$.

e) $T_n\varphi = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\frac{1}{k}) - n\varphi(0) - \ln(n)\varphi'(0)$ (où $n \in \mathbb{N}^*$).

f) $T\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(0)$.

g) $T\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$.

**Exercice 8** Démontrer que l'on définit une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ en posant

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \qquad \langle T, \phi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\phi(x)}{x}\, dx.$$

Cette distribution, dite *valeur principale* est noté $\mathrm{vp}(1/x)$. Montrer que son ordre est inférieur ou égal à 1.

**Exercice 9** Pour $-2 < \alpha < -1$ et $\varepsilon > 0$ montrer que quelque soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} x^{\alpha}\phi(x)\, dx = A\varepsilon^{\alpha+1} + R_{\varepsilon}$$

où la constante $A$ ne dépend pas de $\varepsilon > 0$. Montrer que $R_\varepsilon$ tend vers une limite quand $\varepsilon \to 0+$. On appelle $\langle \mathrm{pf}\ x_+^{\alpha}, \phi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0+} R_\varepsilon$ la *partie finie* de $x^\alpha$. Montrer qu'il s'agit d'une distribution d'ordre inférieur ou égal à 1.

**Exercice 10** Soit $0 \neq \phi$ une fonction positive de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ de support dans $]0,\infty[$. Démontrer qu'il existe deux constantes $C, \beta > 0$ telles que, pour tout $n \geq 1$ on ait

$$\int_0^\infty \exp(n/t)\phi(t)\,dt \geq C\exp(\beta n).$$

En déduire qu'il n'existe pas de distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(]0,\infty[)$ on ait $\langle T, \phi\rangle = \int_0^\infty \exp(1/t)\phi(t)\,dt$. On pourra considérer les fonctions $\phi_n(t) = \phi(nt)$ pour un $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support dans $[1/2, 1]$.

**Exercice 11** Soit $f$ une fonction définie sur $]a,b[$ de classe $C^1$ par morceaux. Soit $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$ une subdivision adaptée à $f$, c'est-é-dire que $f$ se prolonge en une fonction de classe $C^1$ sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$. Montrer que l'on a :

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{i=1}^{N-1} \left(f(a_i{+}0) - f(a_i{-}0)\right)\delta_{a_i},$$

où $f'$ est la dérivée usuelle de $f$, définie hors des points $a_i$, et $f(a_i{\pm}0)$ sont les limites à droite et à gauche de $f$ en $a_i$ (les distributions sont considérées comme éléments de $\mathcal{D}'(]a,b[)$.

**Convergence de distributions**

**Exercice 12** Soit $(T_n)$ une suite de distributions qui converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Démontrer que $(T_n')$ converge vers $T'$.

**Exercice 13** Soit $T_k$ la distribution associé à la fonction $f_k(x) = \Big(\cos(x/\sqrt{k})\Big)^k$. Montrer que $(T_k)$ converge au sens des distributions vers $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ que l'on déterminera.

**Exercice 14** Soit $F_N(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}$. On note $T_N$ la distribution associée à $F_N$ (justifier que $T_{F_N} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$!). Le but de l'exercice est de déterminer la limite (au sens des distributions) de $(T_N)$.

1. Montrer que la suite $(F_N(t))_N$ converge dans aucun point $t$ (on distingue les multiples (ir)rationels de $\pi$). Remarque: ceci barre l'approche par convergence dominé exploité dans l'exercice précédent.

2. Montrer que $F_N(t) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin((2N+1)t/2)}{\sin(t/2)}$ pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

3. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ une fonction à support dans $[-2M\pi, 2M\pi]$. Déduire de l'égalité précedente que

$$\langle T_N, \varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin((2N+1)t/2)}{\sin(t/2)}\,\psi(t)dt,$$

   où $\psi(t) = \sum\limits_{m=-M}^{M-1} \varphi(t + 2m\pi)$.

4. En écrivant $\psi(t) = \psi(0) + th(t)$, démontrer que $T_N$ converge vers $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}$.

## Espaces de Sobolev.

**Exercice 15** Soit $I = (-1, 1)$.

a) Soit $f(x) = \text{signe}(x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Est-ce que $f \in H^1(I)$?

b) Montrer que la fonction

$$u \ : \begin{cases} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x+|x|}{2} \end{cases}$$

appartient à $H^1(I)$ et déterminer sa dérivée.

c) Montrer que toute fonction continue sur $\bar{I}$ et continument dérivable par morceaux sur $\bar{I}$ est une fonction de $H^1(I)$.

**Exercice 16** Soit $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Est-ce que les fonctions suivantes appartiennent à $L_2(\Omega)$ ou à $H^1(\Omega)$?

$$u(x, y) := e^{-x} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \qquad v(x, y) := x^{1/3} \sin(\pi y)$$

**Exercice 17** Soit $(\eta_k)$ une suite de "fonctions plateaux" avec $\eta_k \in \mathcal{D}((0, 1))$, $0 \leq \eta_k \leq 1$, et $\eta_k$ constant à 1 sur $[\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}]$. Expliciter le support de $\eta_k'$. Montrer que $f_k(x) = \eta_k(x) \sin(\pi x) \in \mathcal{D}((0, 1))$ et que $f_k(x) \to \sin(\pi x)$ en norme $H^1$. En déduire que la fonction $u$ de l'exercice précédent appartient à $H_0^1(\Omega)$. Obtenir le même résultat en discutant la régularité de $\Omega$ par un théorème du cours.

**Exercice 18** Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^d$

a) (DS 2017) Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Montrer que $\widehat{u}$ défini par $\widehat{u}(x) = u(x)$ si $x \in \Omega$ et $\widehat{u}(x) = 0$ sinon, définit une fonction dans $H^1(\mathbb{R}^d)$.

b) Soit $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné et $\text{supp}(u) \subset \Omega$. Alors $u \in H_0^1(\Omega)$. Indication: approcher $u$ par une suite de fonctions $(\varphi_n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^d)$, puis utiliser une fonction plateau pour conclure.

**Exercice 19** *(Une inégalité de Poincaré)* Soit $f \in C^1([a, b])$ et $f(a) = 0$. En écrivant $f(x) = \int_a^x f'(t)\, dt$ montrer qu'il existe une constante $C > 0$ (qui dépend de $a, b$), telle que

$$\int_a^b |f(x)|^2\, dx \ \leq \ C \int_a^b |f'(x)|^2\, dx$$

Etendre au cas d'une fonction de classe $C^1$ sur bande $(t, x) \in [0, L] \times \mathbb{R}^{n-1}$ qui s'annule sur le bord $t \in \{0, L\}$.

**Exercice 20** Soit $I$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$.

a) Rappeler l'inégalité de Poincaré pour $f \in H_0^1(I)$. Est-elle vraie pour $f \in H^1(I)$?

b) Soit $f \in H^1(I)$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f(c) = \frac{1}{|I|} \int_I f dx$.

c) En déduire qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f - f(c)\|_{L_2(I)} \leq C\|f'\|_{L_2(I)}$.

d) Etendre la preuve à un un convexe borné $\Omega$ de $\mathbb{R}^n$: il existe un $C > 0$, dépendant de $\Omega$ tel que, pour $f \in H^1(\Omega)$

$$\left\| f - \tfrac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f dx \right\|_{L_2(\Omega)} \leq C \left\| \nabla f \right\|_{L_2(\Omega)}.$$