Université Bordeaux 1 **Le 18 Decembre 2007**
Master de Mathématiques Approfondies. **MHT 733**

Examen d'Analyse Fonctionnelle (Durée 4h)

Exercice 1 Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$|f(t,x)| \leq M(1+|x|) \quad \forall t \in [0,1],\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

1- Fixons un entier naturel non nul n. On définit la suite des points $x_j^n, 1 \leq j \leq n$ par

$$x_0^n = 0,\ x_{j+1}^n = x_j^n + \frac{1}{n} f(j/n, x_j^n),\ 0 \leq j \leq n-1.$$

a) Montrer que pour tout j (entre 0 et n) on a:

$$|x_j^n| \leq (1+M/n)^j - 1$$

et en déduire que $|x_j^n| \leq e^M - 1$.
b) Montrer que pour tout $k > j$

$$x_k^n - x_j^n = \sum_{l=j}^{k-1} \frac{1}{n} f(l/n, x_l^n).$$

c) Soit g_n la fonction affine par morceaux sur $[0,1]$ définie par:

$$\text{pour tout } t \in [j/n, (j+1)/n] : g_n(t) = x_j^n + (t - j/n) f(j/n, x_j^n).$$

Montrer que pour tout $t, s \in [0,1]$

$$|g_n(t) - g_n(s)| \leq M e^M |t-s|$$

Indication: Pour $j < k$ et $t \in [j/n, (j+1)/n],\ s \in [k/n, (k+1)/n]$ écrire

$$g_n(s) - g_n(t) = g_n(s) - g_n(k/n) + g_n(k/n) - g_n((j+1)/n) + g_n((j+1)/n) - g_n(t)$$

2- a) Montrer que g_n admet une sous-suite extraite g_{n_k} qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction $g \in C([0,1])$.
b) On définit pour tout $t \in [0,1]$

$$G_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \chi_{[j/n,(j+1)/n[}(t) f(j/n, g_n(j/n)),$$

où $\chi_{[j/n,(j+1)/n[}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[j/n, (j+1)/n[$. Montrer que $g_n(t) = \int_0^t G_n(s)ds$ pour tout $t \in [0,1]$.

c) Montrer que la sous-suite G_{n_k} converge uniformément sur $[0,1[$ vers la fonction $t \to f(t, g(t))$.
d) En déduire que g est de classe C^1 sur $[0,1]$ et vérifie l'équation différentielle

$$g'(t) = f(t, g(t)) \ \forall t \in [0,1], \ \ g(0) = 0.$$

Exercice 2 Soit $c_0(\mathbb{Z})$ l'espace des suites complexes $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telles que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to-\infty} u_n = 0.$$

1) Montrer que $c_0(\mathbb{Z})$, muni de la norme usuelle $\|.\|_\infty$ est un espace de Banach.
2) Démontrer que $(c_0(\mathbb{Z}))' = \ell^1(\mathbb{Z})$ (i.e, le dual de $c_0(\mathbb{Z})$ est isomorphe et isométrique à l'espace de Banach $\ell^1(\mathbb{Z})$).
3) Soit $f \in L^1([0, 2\pi], dx)$ (où dx désigne la mesure de Lebesgue. Ici les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{C}$) et

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt, \ \ n \in \mathbb{Z},$$

$(c_n(f), n \in \mathbb{Z}$ sont les coefficients de Fourier de f).
a) Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, c_n est une forme linéaire continue sur $L^1([0, 2\pi], dx)$. Calculer sa norme.
b) Montrer que si f est de classe C^1 sur $[0, 2\pi]$ alors la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans $c_0(\mathbb{Z})$.
c) En déduire que la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est dans $c_0(\mathbb{Z})$ pour tout $f \in L^1([0, 2\pi], dx)$.

4) Soit $T : L^1([0, 2\pi], dx) \to c_0(\mathbb{Z})$ l'opérateur défini par

$$T(f) = (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}.$$

a) Montrer que T est un opérateur linéaire continu.
b) Rappeler la définition de l'adjoint T^* de T. Quels sont les espaces de départ et d'arrivée de T^* ?
c) Donner l'expression de T^*.